LES COLLOÏDES DANS L'INDUSTRIE

LE CAOUTCHOUC

PRIX NET SANS MAJORATION :

Broché, **29** francs. — Reliure, **3** fr. **50** en sus.

C. I. D.

LES COLLOÏDES DANS L'INDUSTRIE

LE CAOUTCHOUC

PAR

PAUL BARY
INGÉNIEUR E. P. C.
EX-CHEF DES TRAVAUX A L'ÉCOLE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE
ET AU LABORATOIRE CENTRAL D'ÉLECTRICITÉ

OUVRAGE HONORÉ D'UNE MÉDAILLE D'OR
PAR LA SOCIÉTÉ D'ENCOURAGEMENT A L'INDUSTRIE NATIONALE

PARIS
DUNOD, ÉDITEUR
47 ET 49, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS (VI^E)

1923

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE IV

La vulcanisation.

CHAPITRE V

Caoutchoucs synthétiques et régénérés. — Produits de substitution.

CHAPITRE PREMIER

LES LATEX ET LEUR COAGULATION

Préliminaires.

1. Parmi les nombreuses substances colloïdales naturelles, le caoutchouc et la gélatine sont celles qui tiennent la plus grande place dans l'industrie ; le caoutchouc possède des propriétés d'élasticité et de résistance mécanique, qu'on sait faire varier en toutes proportions suivant les besoins et qui en font une matière qui n'a réellement pas de succédanés. Aussi, en dehors des produits ajoutés au caoutchouc, telles que les factices, pour en diminuer le prix de revient et aussi pour obtenir des qualités différentes, dont la quantité ne peut dépasser une certaine proportion, le caoutchouc est-il toujours nécessaire pour former la base des mélanges et toutes les tentatives faites pour y substituer un autre corps sont-elles restées sans résultat.

L'intérêt que trouveraient les industries chimiques à s'affranchir de cette matière première, qui n'est récoltée que dans les régions tropicales et dont le prix de revient a été à certaines époques excessivement élevé, a poussé les chimistes vers la synthèse du caoutchouc qui a été réalisée aujourd'hui, au moins au laboratoire, de bien des manières différentes.

Le réemploi des déchets de caoutchouc, après régénération plus ou moins complète de ses propriétés d'origine, est également une question qui a été travaillée et elle est entrée depuis longtemps dans la pratique courante.

Les résultats ainsi obtenus, tant dans la synthèse que dans la régénération du caoutchouc, ne pouvaient être atteints qu'avec une connaissance assez complète des propriétés physico-chimiques de la

substance naturelle qu'il s'agissait de reproduire ou de reconstituer. L'étude de ces propriétés a beaucoup aidé à la compréhension de la notion de la colloïdité et à sa généralisation à d'autres corps que ceux capables de se produire et d'évoluer dans des milieux conducteurs de l'électricité, où les théories d'ionisation et d'électrisation superficielle semblaient suffisantes pour résoudre tous les problèmes.

Aussi à côté de l'importance considérable de l'industrie du caoutchouc qui suffit à rendre son étude extrêmement utile, le bénéfice à en tirer est-il accru par les conséquences générales qui s'en peuvent déduire dans l'application à d'autres industries connexes telles que celle des matières isolantes.

2. Le point de vue spécial que nous avons à envisager dans ce livre est celui de la colloïdité et nous n'aurons à nous occuper que des caractères colloïdaux du caoutchouc, de la fonction qu'ils remplissent dans la dissolution, la vulcanisation, etc. ; nous ne traiterons donc pas la question d'ensemble qui a fait l'objet de nombreux et d'excellents traités que la présente monographie ne saurait prétendre à remplacer. La question complète de l'industrie du caoutchouc est extrêmement touffue ; elle s'étend depuis la culture des arbres producteurs de latex jusqu'à l'obtention des objets manufacturés si divers où le caoutchouc trouve son emploi ; presque chaque application : pneumatiques, chaussures, ébonite, etc., peut faire à elle seule l'objet d'un volume bien rempli. Notre étude ne doit pas comprendre toutes ces matières pour lesquelles nous renvoyons le lecteur aux ouvrages généraux et spéciaux qui le renseigneront complètement sur la culture des arbres à caoutchouc, le traitement des latex et applications industrielles du caoutchouc [1]. Le programme que nous suivrons est

[1] Parmi les nombreux ouvrages traitant du caoutchouc, on peut citer :

E. Chapel, *Le caoutchouc*, Marchal et Billard, Paris, 1892.

H. Jumelle, *Les plantes à caoutchouc et à gutta*, Paris, 1902.

Seeligmann, Lamy-Torrilhon et Falconnet, *Le caoutchouc et la gutta-percha*, Fritsch, Paris, 1906.

C.-O. Weber, *The Chemistry of India Rubber*, 3e éd., Griffin et Cie, Londres, 1909.

A. Heil et W. Esch, *Fabrication du caoutchouc*, traduit par E. Ackermann, Béranger, Paris, 1909.

A. Fayol, *Le caoutchouc*, Béranger, Paris, 1909.

E. Tassilly, *Caoutchouc et gutta-percha*, O. Doin, Paris, 1911.

à la fois plus général et plus restreint et bien que nous nous proposions de parler de la coagulation des latex, de la dissolution, des mélanges, de la vulcanisation, de la synthèse et de la régénération, c'est-à-dire de presque tout ce qui concerne le caoutchouc, nous n'aborderons chacun de ces sujets que sous le seul point de vue colloïdal ; on n'a pas encore fait ressortir d'ensemble l'extrême intérêt qu'il présente, non pas seulement pour les savants, mais pour les praticiens qui se croient trop souvent liés par des formules et des procédés que l'usage a enseignés et qui n'en peuvent sortir que difficilement par suite de l'absence des notions générales, d'un acquit d'ailleurs récent, qui unissent ces procédés entre eux et fournissent souvent le fil conducteur permettant de passer de ceux-ci à d'autres.


Fig. 1. — Hevea Brasiliensis.

Généralités.

3. Les arbres à caoutchouc qui produisent un latex de qualité convenable pour l'exploitation sont d'espèces assez diverses. Ils appartiennent à six familles botaniques principales : *euphorbiacées, artocarpées, apocynacées, asclépiadées, sapotacées* et *moracées*. Ils ne donnent pas tous des produits de même qualité.

Les euphorbiacées sont les plus remarquables par le genre *hevea* et spécialement l'*hevea brasiliensis* dont on tire le caoutchouc dit

P. Schidrowitz, *Rubber*, Methuen et Cie, Londres, 1911.
L. Ventou-Duclaux, *Les caoutchoucs artificiels*, Dunod, Paris, 1912.
A. Dubosc et A. Luttringer, *Le caoutchouc, sa chimie nouvelle, ses synthèses*, A.-D. Cillard, Paris, 1913.
R. de Fleury, *Technologie du caoutchouc souple*, Dunod, Paris, 1920.

DIE MATHEMATISCHEN HILFSMITTEL DES PHYSIKERS

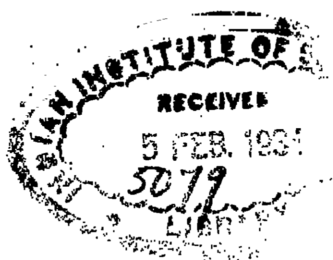
VON

DR. ERWIN MADELUNG
ORD. PROFESSOR DER THEORETISCHEN PHYSIK
AN DER UNIVERSITÄT FRANKFURT A. M.

ZWEITE VERBESSERTE AUFLAGE

MIT 20 TEXTFIGUREN





BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1925

Vorwort zur ersten Auflage.

Die Veranlassung zur Niederschrift dieses Buches entsprang einen persönlichen Bedürfnis. Ursprünglich war das Material für den eigener Gebrauch bei Untersuchungen und Vorlesungen gesammelt, um da dauernde Nachschlagen in den verschiedensten Lehrbüchern zu er sparen. Als ich mich dann auf das Zureden befreundeter Fachkollegen hin entschloß das Vorhandene nach Möglichkeit zu ergänzen und in die Form eines Buches zu bringen, glaubte ich, daß das von mi Gesammelte auch für andere nützlich sein könnte. Es schwebte mi dabei als Ideal vor, ein Buch zu verfassen, das als theoretisches Analogon zu dem bekannten Buche von Kohlrausch aufgefaßt werden könnte Je weiter ich mit der Bearbeitung des Materials fortschritt, um so deutlicher wurde mir freilich, daß sich dieses Ideal zunächst nich würde erreichen lassen, und daß es in mancher Richtung besser ge wesen wäre, wenn dieses Buch nicht von einem, sondern von mehreren Physikern und Mathematikern geschrieben würde. So verlockend es gewesen wäre auf diese Weise etwas Vollkommenes in die Wege zu leiten, so habe ich doch endgültig davon abgesehen die Aufgabe zu teilen, in der Erwägung, daß ein Buch, das für den praktischen Ge brauch der Physiker bestimmt ist, auch wenn es wesentlich Mathematik enthält, nur von einem Physiker verfaßt sein darf, und daß bei eine Verteilung der Aufgabe auf mehrere Mitarbeiter die Homogenität zu sehr gelitten hätte. Ich hege die Hoffnung, daß, nachdem das Buch einmal in einem bestimmten Charakter geschrieben vorliegt, zu einer späteren Zeit durch die Mitarbeit von mehreren Fachkollegen die vorhandenen Mängel ausgeglichen werden.

Für die Auswahl des Stoffes war für mich bestimmend, daß das Buch alles enthalten sollte, was der rechnende Physiker an Grund lagen und Methoden braucht, soweit er nicht zum Zurückgreifen au Spezialarbeiten genötigt sein sollte. Dabei ist grundsätzlich, um den Umfang des Buches zu beschränken und aus andern naheliegenden Gründen alles fortgelassen, was als „trivial" bezeichnet werden dar und was sich in handlicher Form vereinigt in vorhandenen Formel sammlungen z. B. der von Bürklen (Sammlung Göschen) vorfindet Andrerseits ist nach oben eine bestimmte Grenze nicht gezogen, viel

mehr möglichst alles an Mathematik berücksichtigt, was nach meinem Urteil für die Behandlung physikalischer Probleme bisher verwandt worden ist oder Aussicht auf Verwendung bietet.

Die Darstellung bringt fast durchweg nur die Definitionen der Grundbegriffe, die Ansatzbildungen und die Resultate. Beweise sind nur an einzelnen Stellen angedeutet. Die Bezeichnungen schließen sich nach Möglichkeit den üblichsten an. Hier eine bestimmte Auswahl zu treffen war oft schwierig. Zu Abweichungen vom Üblichen war ich in einzelnen Fällen gedrängt, um die Darstellung einheitlicher zu gestalten.

Dem rein mathematischen ersten Teil schließt sich ein physikalischer an. Dieser zweite Teil sollte ursprünglich nur eine Sammlung von Anwendungsbeispielen des ersten enthalten. Ich habe ihn soweit ergänzt, daß er in sich eine gewisse Geschlossenheit besitzt. In ihm sind die Grundbegriffe der theoretischen Physik bzw. deren mathematische Formulierung und Begriffsbildung dargestellt.

Besonderes Gewicht habe ich auf die Vektor- und Tensorrechnung gelegt. Ich halte diese Disziplin für eines der allerwichtigsten mathematischen Hilfsmittel des Physikers. Ich bin der Ansicht, daß sie wegen ihrer großen Anschaulichkeit mehr ist als eine kürzere Schreibweise und daß ihre eingehende Kenntnis gleichzeitig die Vertrautheit mit anderen wichtigen mathematischen Disziplinen, wie Invariantentheorie, Differenzialgeometrie usw. mit sich bringt, wenigstens soweit diese für die Physik von Bedeutung sind. Dementsprechend habe ich mich in der Darstellung der physikalischen Grundlagen in einem höheren Maße als meist üblich der Vektoren- und besonders der Tensorenrechnung bedient.

Ich übergebe das Buch der Öffentlichkeit mit großen Bedenken, hoffe aber, daß es sich trotz vieler Mängel als nützlich erweisen wird und daß die Fachkollegen bemerken werden, daß das Ganze nicht bloß durch Zusammenschreiben aus den verschiedensten Lehrbüchern entstanden ist, sondern daß auch an vielen Stellen Ergebnisse eigener Bemühungen eingestreut sind. Ich habe einer größeren Anzahl von Kollegen für ihre Hilfe zu danken, die sie mir teils durch kleinere Beiträge, teils durch Beratung, teils durch Durchsicht des Manuskriptes, sowie der Korrekturen geleistet haben. Besonders danke ich den Herren Courant, Baule, Landé, Epstein, Bessel-Hagen, Brody und Götze.

Frankfurt a. M., September 1922.

Erwin Madelung.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die vorliegende zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten durch eine Reihe von kleineren Korrekturen teils sachlicher, teils stilistischer Art, sowie durch einige Zusätze. Solche Zusätze betreffen u. a.: die Verwendung einer Greenschen Funktion, Randwertaufgaben, Tensoranalysis, Theorie des Kreisels, allgemeine Relativitätstheorie und Quantentheorie. Der Charakter des Buches ist im übrigen unverändert geblieben. Auf einen von mathematischer Seite geäußerten Wunsch hin wurden einige Umstellungen in der Reihenfolge der Kapitel vorgenommen.

Ich danke allen Kollegen, die mich durch ihre Kritik auf Schwächen und Versehen in der ersten Auflage aufmerksam gemacht haben.

Im besonderen danke ich den Herren Kollegen Courant-Göttingen und Lanczos-Frankfurt für ihre Unterstützung beim Lesen der Korrekturen.

Frankfurt a. M., Juli 1925.

Erwin Madelung.

Inhaltsverzeichnis.

Fünfter Abschnitt

Transformationen.

Sechster Abschnitt.

Differentialgleichungen.

Siebenter Abschnitt.

Achter Abschnitt.

Neunter Abschnitt.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Seite

Zehnter Abschnitt.

Vektoranalysis.

Elfter Abschnitt.

Mechanik.

Zwölfter Abschnitt.

Elektrizitätslehre.

Dreizehnter Abschnitt.

Relativitätstheorie.

Vierzehnter Abschnitt.

Thermodynamik.

Anhang

Quantentheorie.

Einige physikalische Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Einleitung.

Dem rechnenden Physiker, im speziellen dem „Theoretiker“ bieten sich die Probleme zumeist in der Form, daß er von mehr oder weniger einfachen Voraussetzungen ausgehend unter Verwendung gegebener Gesetze die Konsequenzen sucht.

Es handelt sich hierbei zunächst darum, die Voraussetzungen zu formulieren, d. h. in mathematischer Form auszudrücken. Hierfür können keine Vorschriften gegeben werden. Nächst der Konzeption des Problems ist die Formulierung der Teil der Arbeit, der die größte Anforderung an die spezifischen Qualitäten des Forschers stellt. Das weitere ist Sache des mathematischen Könnens bzw. Wissens. Es ist, soweit nicht neue Methoden gefunden werden müssen, etwas fast Handwerksmäßiges. Zum Schlusse folgt wieder die Übersetzung des mathematisch gefundenen Ergebnisses in die physikalische Denkform.

Zwei Dinge sind dabei besonders zu beachten. Erstens muß in der Regel das Problem so weit vereinfacht werden, daß die mathematischen Hilfsmittel zur Bewältigung ausreichen. Eine Übersicht über die Methoden und deren Tragweite ist daher unbedingt erforderlich. Sie kann nur durch das Studium fremder Arbeiten, sowie durch Erfahrung bei eigenen Bemühungen gewonnen werden. Zweitens muß eine eingehende Betrachtung darüber angestellt werden, bis zu welchem Grade die Vereinfachung der Voraussetzungen den Wert des Resultates beeinträchtigt. Ohne eine derartige Kritik bleibt der Wert jeder theoretischen Untersuchung zweifelhaft.

Die Form der Lösungen, wie sie die üblichen mathematischen Hilfsmittel geben, ist durchaus nicht immer unmittelbar verwendbar. In denjenigen Fällen, in denen das Ergebnis praktisch verwertet werden soll, ist es nötig, daß bei zahlenmäßig gegebenen Voraussetzungen auch eine zahlenmäßige Auswertung des Resultats mit der erforderlichen Genauigkeit in hinreichend kurzer Zeit durchführbar ist. Daher ist es wünschenswert, daß möglichst nur solche funktionale Abhängigkeiten im Resultat stehen, welche mit Hilfe der niederen Rechenoperationen und mit Benutzung von vorhandenen Funktionstabellen berechnet werden können. Andernfalls müssen die Hilfsmittel der sogenannten „praktischen Analysis“, d. h. graphische und numerische Methoden, benutzt werden. Auf diese Methoden ist in

dem vorliegenden Buch nicht eingegangen, weil die nötigen Anweisungen ein Zusammendrängen auf so kleinen Raum nicht gestatten. Es sei hier verwiesen z. B. auf die Lehrbücher: *Runge-König:* Numerisches Rechnen (Berlin: Julius Springer); *Bruns:* Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens (Leipzig: B. G. Teubner); *v. Sanden:* Praktische Analysis (Leipzig: B. G. Teubner); *Whittaker-Robinson:* The calculus of observations (London: Blackie and Son), und viele andere mehr.

Erster Abschnitt.

Algebra.

A. Lineare Gleichungssysteme[1]).

Die allgemeine Form für n lineare Gleichungen mit n Unbekannten ist

$$(1)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

oder abgekürzt geschrieben

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Deutet man die Größen b_i als Komponenten eines Vektors $\mathfrak{b}$ im n-dimensionalen Raum und ebenso die x_i als Komponenten eines Vektors $\mathfrak{x}$, so ist (1) symbolisch zu schreiben durch

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{b}.$$

$\mathfrak{A}$ bedeutet hierbei einen „Tensor", der die Zuordnung der Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{b}$ definiert.

1. Sind alle $b_i = 0$, so heißt das Gleichungssystem *homogen*.

Homogene lineare Gleichungssysteme haben dann und nur dann ein von 0 verschiedenes Lösungssystem ξ_k, d. h. $\sum_k a_{ik}\xi_k = 0$ für mindestens ein $\xi_k \neq 0$, wenn die Determinante der Koeffizienten

$$(2)\qquad |a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

ist. Das Lösungssystem ist dann bis auf einen Faktor bestimmt durch $\xi_1 : \xi_2 : \ldots : \xi_n = A_{i1} : A_{i2} : \ldots : A_{in}$, wo A_{ik} die Unterdeterminanten (vgl.

[1]) Betreffs der vektoranalytischen Begriffe vgl. S. 152ff.

S. 7) zu a_{ik} sind und i ein beliebiger Index ($i = 1$, oder $i = 2, \ldots$) ist für mindestens ein $A_{ik} \neq 0$. $n - l$ unabhängige Lösungssysteme $\xi_k^{(h)}$ ($h = 1, 2, \ldots, n - l$) liegen vor, wenn $|a_{ik}|$ vom Range $l < n$ ist, d. h. wenn nicht alle Unterdeterminanten l-ten, aber alle höheren Grades verschwinden. Jedes System linearer Kombinationen $\sum\limits_h c_h \xi_i^{(h)}$ mit beliebigen c_h ist dann wieder ein Lösungssystem.

Das Verschwinden von $|a_{ik}|$ bedeutet, daß, wenn $\mathfrak{x}$ beliebige Werte annimmt, $\mathfrak{A}\mathfrak{x}$ immer in einer Ebene $(n-1)$-ten Grades liegt, speziell in einer solchen l-ten Grades, wenn $|a_{ik}|$ vom Rang $l < n$ ist.

Für jeden Vektor $\mathfrak{x}$ senkrecht zu dieser Ebene wird $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = 0$.

Das *transponierte* homogene Gleichungssystem (entstanden durch Ersetzung von a_{ik} durch a_{ki}) hat ebenso viele Lösungssysteme $\xi_i^{(h)'}$ wie das ursprüngliche.

Nennen wir den durch Transposition gebildeten Tensor $\mathfrak{A}'$, so wird $(\mathfrak{b}\mathfrak{A}\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}\mathfrak{A}'\mathfrak{b})$ (vgl. S. 163).

2. *Inhomogen* heißt das Gleichungssystem, wenn nicht alle $b_i = 0$ sind.

Fall a. Ist $|a_{ik}| \neq 0$, hat also das zugehörige homogene System keine Lösung, so hat das inhomogene System ein und nur ein Lösungssystem

$$(3) \qquad x_k = \frac{1}{|a_{ik}|}(b_1 A_{1k} + b_2 A_{2k} + \ldots) = \frac{1}{|a_{ik}|} \sum_i b_i A_{ik}$$

(vgl. S. 10).

$\frac{A_{ik}}{|a_{ik}|}$ sind die Komponenten des *reziproken* Tensors $\mathfrak{A}^{-1}$ (vgl. S. 164)
$\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$; $\mathfrak{x} = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{b}$.

Fall b. Ist $|a_{ik}| = 0$, hat also das zugehörige homogene System Lösungssysteme, so ist das inhomogene System im allgemeinen nicht lösbar, sondern nur dann, wenn die $n - l$ Bedingungen

$$(4) \qquad \sum_k b_k \xi_k^{(h)'} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n - l)$$

erfüllt sind. Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems besteht dann aus *einer* Lösung des inhomogenen Systems, vermehrt um die $n - l$ unabhängigen Lösungen des homogenen Systems.

Hat die homogene Gleichung die Lösungen $\mathfrak{x}_h$ bzw. die transponierte die Lösungen $\mathfrak{x}_h'$, also $\mathfrak{A}'\mathfrak{x}_h' = 0$, so muß sein: $(\mathfrak{x}\mathfrak{A}'\mathfrak{x}_h') = 0 = (\mathfrak{x}_h'\mathfrak{A}\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}_h'\mathfrak{b}) = 0$. Die $\mathfrak{x}_h'$ sind also Vektoren, die auf der l-dimensionalen Ebene, in der alle $\mathfrak{A}\mathfrak{x}$ liegen, senkrecht stehen.

Ein wichtiger Fall

ist folgender: Gegeben sei ein System inhomogener linearer Gleichungen in der Form:

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
(a_{11}-\lambda)\,x_1 + \quad a_{12}\,x_2 + \cdots + \quad a_{1n}\,x_n &= b_1\\
a_{21}\,x_1 + (a_{22}-\lambda)\,x_2 + \cdots + \quad a_{2n}\,x_n &= b_2\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{n1}\,x_1 + \quad a_{n2}\,x_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)\,x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

wobei die a_{ik} reell angenommen und $a_{ik} = a_{ki}$ sei. Abgekürzt geschrieben

$$\sum_k a_{ik}\,x_k - \lambda\,x_i = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Das zugehörige ***homogene*** System

$$\sum_k a_{ik}\,x_k - \lambda\,x_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

hat nur Lösungen, wenn λ einen der n (reellen) (vgl. S. 9) Werte λ_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) annimmt, welche sich durch Nullsetzen der Determinante

$$
(6)\qquad
\begin{vmatrix}
(a_{11}-\lambda) & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \cdots & a_{2n}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nn}-\lambda)
\end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(„Säkulargleichung“)}
$$

als Wurzeln dieser Gleichung n-ten Grades ergeben. Das zu dem *„Eigenwert“* λ_j gehörige Lösungssystem der homogenen Gleichungen heiße $\xi_{1j}, \xi_{2j}, \ldots, \xi_{nj}$, so daß $\lambda_j\,\xi_{ij} = \sum_k a_{ik}\,\xi_{kj}$.

Die *„Eigenlösungen“* ξ_{kj} sind bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt, wenn λ_j eine einfache Wurzel ist. Dieser soll festgelegt werden durch die *„Normierungsgleichungen“*

$$(7)\qquad \xi_{1j}^2 + \xi_{2j}^2 + \cdots + \xi_{nj}^2 = \sum_k \xi_{kj}^2 = 1.$$

Dagegen gilt stets für zwei verschiedene $\lambda_j \neq \lambda_{j'}$

$$(7')\qquad \xi_{1j}\,\xi_{1j'} + \xi_{2j}\,\xi_{2j'} + \cdots + \xi_{nj}\,\xi_{nj'} = \sum_k \xi_{kj}\,\xi_{kj'} = 0\,.$$

Führt man statt x_k und b_k neue Größen x'_k und b'_k ein durch die (*orthogonale*) Transformation (*Hauptachsentransformation,* Entwicklung nach *Eigenlösungen*)

$$x_i = \sum_k \xi_{ik}\,x'_k \quad \text{und} \quad b_i = \sum_k \xi_{ik}\,b'_k,$$

aufgelöst

$$x'_k = \sum_i \xi_{ik}\,x_i \quad \text{und} \quad b'_k = \sum_i \xi_{ik}\,b_i,$$

so wird

$$(8)\qquad \sum_k x_k^2 = \sum_k x_k'^2, \quad \sum_i \sum_k a_{ik}\,x_i\,x_k = \sum_j \lambda_j\,x_j'^2.$$

Das obige *inhomogene* System erhält dann die Form:

$$(\lambda_k - \lambda) x_k' = b_k',$$

was durch Einsetzen zur Lösung

(9) $$x_i = \sum_k \frac{\xi_{ik}}{\lambda_k - \lambda} \sum_l \xi_{lk} b_l \qquad \text{führt.}$$

In Vektorrechnung bedeutet dies folgendes:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} + \lambda\mathfrak{x} = \mathfrak{b}; \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}'.$$

Wir suchen Lösungen $\mathfrak{l}_j$ der homogenen Gleichung:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{l}_j - \lambda_j \mathfrak{l}_j = 0.$$

Die Lösung der inhomogenen Gleichung lautet dann:

$$\mathfrak{x} = \sum_k \frac{\mathfrak{l}_k}{\lambda_k - \lambda} (\mathfrak{l}_k \mathfrak{b}) \qquad \text{(Gl. 9)},$$

wobei die bis auf einen Faktor bestimmten Vektoren $\mathfrak{l}_k$ als Einheitsvektoren normiert seien (Gl. 7).

Da für zwei *verschiedene* λ_k und $\lambda_{k'}$

$$(\mathfrak{l}_k \mathfrak{A} \mathfrak{l}_{k'}) = (\mathfrak{l}_{k'} \mathfrak{A} \mathfrak{l}_k) = \lambda_k (\mathfrak{l}_k \mathfrak{l}_{k'}) = \lambda_{k'} (\mathfrak{l}_k \mathfrak{l}_{k'})$$

ist, muß $(\mathfrak{l}_k \mathfrak{l}_{k'}) = 0$ sein (Gl. 7').

Anwendung: Dieser Typus von Gleichungen wird gebraucht u. a. bei der Berechnung der Eigenschwingungen bzw. erzwungenen Schwingungen von Systemen mit n Freiheitsgraden. Die λ_j spielen hier die Rolle von *Eigenfrequenzen*; die x_i' heißen dann *Normalkoordinaten.* Man verwendet diese Gleichungen auch bei der Beurteilung von Stabilitätsfragen (vgl. S. 199).

B. Matrizen und Determinanten.

1. Definitionen.

Ein System von $m \cdot n$ Zahlen a_{ik} („*Elemente*"), das in einem rechteckigen Schema von m „*Zeilen*" und n „*Spalten*" *geordnet* ist, heißt eine „*Matrix*".

(1) $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \text{Zeile} = \text{Horizontalreihe} \\ \text{Spalte} = \text{Vertikalreihe.} \end{matrix}$$

Ist $m = n$, so heißt die Matrix *quadratisch.*

Die Elemente a_{ik} können verschiedene Bedeutung haben. Sie können z. B. die Koeffizienten eines Systems linearer Gleichungen,

einer linearen Transformation, bzw. Komponenten eines Tensors (vgl. S. 172) sein. Ist die Matrix quadratisch, so können sie die Elemente einer Determinante sein.

Vertauscht man in der Matrix alle a_{ik} mit den a_{ki}, also Zeilen und Spalten miteinander, so heißt die neue Matrix die „*transponierte*" der ursprünglichen oder zu dieser „*konjugiert*".

Aus einer quadratischen Matrix von $n \cdot n$ Elementen a_{ik} bildet man ihre „*Determinante*", indem man die sämtlichen Produkte der Form: $a_{ik} a_{i'k'} a_{i''k''} \dots$ bildet, so daß alle $i, i' \dots$ und alle $k, k' \dots$ untereinander verschieden sind. Die Indizes $i, i', i'' \dots$ und die $k, k', k'' \dots$ bilden eine Permutation der natürlichen Zahlenfolge $1, 2, 3 \dots$ der i bzw. der k.

Jedes dieser Produkte aus n Elementen heißt ein „*Glied*" der Determinante. Die Zahl der Glieder ist gleich $n!$ Die Determinante ist die Summe dieser Glieder unter Beachtung folgender Vorzeichenregel: Man ordne in jedem Glied die Faktoren so, daß die i in ihrer natürlichen Zahlenfolge stehen und untersuche, wieviel Vertauschungen von je zwei Faktoren nunmehr nötig sind, um die k in ihre natürliche Folge zu bringen. Ist diese Zahl gerade, so ist das Vorzeichen positiv, andernfalls negativ zu setzen. Die Zahl der positiven Glieder ist gleich der der negativen.

Die Determinante schreibt man abgekürzt:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn} = |a_{ik}|.$$

Eine Determinante aus n^2 Größen heißt „n-ter Ordnung".

Determinanten, die man erhält, wenn man aus der Matrix einer gegebenen Determinante gewisse Zeilen und Spalten streicht, heißen „*Minoren*" der ursprünglichen.

Streicht man die i-te Zeile und die k-te Spalte und multipliziert man den entstehenden Minor mit $(-1)^{i+k}$, so heißt das Produkt die „*Unterdeterminante*" von a_{ik} (geschrieben A_{ik}).

Entwicklungssatz: Der Wert einer Determinante ist gleich:

$$(3) \qquad |a_{ik}| = \sum_i a_{ik} A_{ik} = \sum_k a_{ik} A_{ik},$$

aber es ist

$$(4) \qquad 0 = \sum_k a_{ik} A_{jk} \quad \text{für } i \neq j.$$

Eine Matrix oder eine Determinante heißt „*vom Range r*", wenn sie wenigstens eine von Null verschiedene Unterdeterminante r-ter Ordnung besitzt, aber alle in ihr enthaltenen Unterdeterminanten höherer Ordnung verschwinden.

Allgemeine Sätze: Eine Determinante ist $= 0$, wenn
1. alle Elemente einer Reihe (Spalte oder Zeile) $= 0$ sind, oder
2. alle Elemente einer Reihe dieselben Vielfachen der entsprechenden Elemente einer Parallelreihe sind, oder
3. alle Elemente einer Reihe dieselben linearen Kombinationen der entsprechenden Elemente von Parallelreihen sind.

Eine Determinante bleibt ungeändert, wenn
1. man sie transponiert, d. h. alle a_{ik} durch a_{ki} ersetzt,
2. man zu den Elementen einer Reihe die entsprechenden einer Parallelreihe bzw. ein bestimmtes Vielfaches derselben addiert.

Eine Determinante ändert nur ihr Vorzeichen, wenn man zwei Reihen miteinander vertauscht.

Eine Determinante wird mit einem Faktor multipliziert, wenn man alle Elemente einer Reihe mit diesem Faktor multipliziert.

Differentiation.

$$\frac{\partial |a_{ik}|}{\partial a_{ik}} = A_{ik} \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 |a_{ik}|}{\partial a_{ik}\, \partial a_{lm}} = -\frac{\partial^2 |a_{ik}|}{\partial a_{im}\, \partial a_{lk}}, \tag{6}$$

wenn alle a_{ik} voneinander unabhängig sind.

2. Multiplikation von Determinanten.

Das Produkt $|a_{ik}| \cdot |b_{ik}| = |c_{ik}|$ ist eine Determinante, deren Elemente c_{ik} in folgenden vier verschiedenen Weisen gebildet werden können:

$$\begin{aligned}
(7) \quad & 1.\quad c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \dots = \sum_j a_{ij} b_{jk} \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n) \\
& 2.\quad c_{ik} = a_{i1} b_{k1} + a_{i2} b_{k2} + \dots = \sum_j a_{ij} b_{kj} \\
& 3.\quad c_{ik} = a_{1i} b_{k1} + a_{2i} b_{k2} + \dots = \sum_j a_{ji} b_{kj} \\
& 4.\quad c_{ik} = a_{1i} b_{1k} + a_{2i} b_{2k} + \dots = \sum_j a_{ji} b_{jk}\,.
\end{aligned}$$

Die Matrix der gemäß Vorschrift 1 gebildeten c_{ik} heißt die aus den Matrizes der a_{ik} und b_{ik} „*komponierte*" Matrix.

3. „Ränderung" von Determinanten.

Es gilt:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & u_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n & w \end{vmatrix} = w \cdot |a_{ik}| - \sum_i \sum_k A_{ik} \cdot u_i \cdot v_k\,. \tag{8}$$

Ist im Speziellen $w = 1$ und sämtliche u_i oder $v_k = 0$, so ist der Wert $= |a_{ik}|$, d. h. gleich dem Wert der ursprünglichen Determinante.

4. Praktische Berechnung von Determinanten.

Man subtrahiere von den Elementen der i-ten Zeile die mit $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ multiplizierten entsprechenden Elemente der ersten. Hierdurch wird der Wert von $|a_{ik}|$ nicht geändert. Führt man dies an allen Zeilen (außer der ersten) durch, so erhält man eine Determinante der Form

$$(9) \qquad |a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

In derselben Weise reduziert man die Determinante der b usf. Man erhält schließlich ein einfaches Produkt von n Zahlen als Wert von $|a_{ik}|$. Hierbei ist es meist vorteilhaft, Vertauschungen von Reihen vorzunehmen (unter Beachtung der dabei auftretenden Vorzeichenwechsel) und jeweils möglichst große Faktoren abzusondern.

5. Spezielle Determinanten.

Ist $a_{ik} = a_{ki}$, so heißt die Determinante *symmetrisch*; ist $a_{ik} = -a_{ki}$ und daher $a_{ii} = 0$, so heißt sie *schiefsymmetrisch* (antisymmetrisch).

Sind die a_{ik} konjugiert komplex zu den a_{ki} (d. h. $a_{ik} = u + iv$; $a_{ki} = u - iv$) und die a_{ii} reell, so hat die Determinante einen reellen Wert (*Hermitesche* Determinante).

Die Gleichung n-ten Grades:

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} (a_{11} - x) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - x) & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nn} - x) \end{vmatrix} = 0$$

(*Säkulargleichung*[1]) für die Unbekannte x)

hat lauter reelle Wurzeln, falls $a_{ik} = a_{ki}$ und alle a_{ik} reell sind; ebenso, falls die Determinante der a_{ik} eine Hermitesche ist.

Die Gleichung hat (außer $x = 0$, wenn n ungerade) lauter imaginäre Wurzeln, falls die $a_{ik} = -a_{ki}$ und reell und die $a_{ii} = 0$ sind.

[1]) Der Name „Säkulargleichung" ist nur für $a_{ik} = a_{ki}$ gebräuchlich. Sonst heißt die Gleichung „charakteristische Gleichung".

Eine symmetrische Determinante der Form:

(11)
$$Z_n = \begin{vmatrix} a_1 \, a_2 \dots a_n \\ a_2 \, a_3 \dots a_1 \\ a_3 \, a_4 \dots a_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n \, a_1 \dots a_{n-1} \end{vmatrix}$$

heißt eine *Zirkulante* oder *zyklische* Determinante. Ihr Wert ist gleich:

(12)
$$Z_n = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} (a_1 + a_2 \omega^k + a_3 \omega^{2k} + \dots + a_n \omega^{(n-1)k}),$$

wo $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ ist.

6. Determinanten und lineare Gleichungssysteme.

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem:

(13)
$$\sum_k a_{ik} x_k = b_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

d. h. n lineare Gleichungen für die n Unbekannten x_k mit $|a_{ik}| \neq 0$. Dann ist

(14)
$$x_k = \begin{vmatrix} a_{11} \, a_{12} \dots a_{1(k-1)} \, b_1 \, a_{1(k+1)} \dots a_{1n} \\ a_{21} \, a_{22} \dots a_{2(k-1)} \, b_2 \, a_{2(k+1)} \dots a_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} \, a_{n2} \dots a_{n(k-1)} \, b_n \, a_{n(k+1)} \dots a_{nn} \end{vmatrix} : |a_{ik}|,$$

d. h. gleich der Determinante, die man aus $|a_{ik}|$ erhält, wenn man die Elemente der k-ten Spalte durch die entsprechenden b_i ersetzt, dividiert durch $|a_{ik}|$.

(Diese formale Lösung ist zur praktischen Rechnung oft wenig geeignet, weil die Umrechnung der Determinanten mehr Arbeit erfordert als die Berechnung von x_k durch schrittweise Elimination.)

Umgekehrt kann der Wert von $|a_{ik}|$ auch aus den Lösungen von linearen Gleichungssystemen gefunden werden, wie folgt:

Man löse nacheinander folgende Systeme

1. $a_{11} x_1 = 1.$

2. $\begin{cases} a_{11} x_2 + a_{12} y_2 = 0 \\ a_{21} x_2 + a_{22} y_2 = 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} a_{11} x_3 + a_{12} y_3 + a_{13} z_3 = 0 \\ a_{21} x_3 + a_{22} y_3 + a_{23} z_3 = 0 \\ a_{31} x_3 + a_{32} y_3 + a_{33} z_3 = 1 \end{cases}$

usw.

Dann ist

(15) $$|a_{ik}| = \frac{1}{x_1 y_2 z_3 \ldots w_n}.$$

Die Berechnung von Determinanten und die Lösung von linearen Gleichungssystemen sind daher praktisch gleiche Probleme.

C. Kombinatorik.

I. **Permutationen:**

1. Die Anzahl der Permutationen aus n verschiedenen Elementen ist $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ (n Fakultät).

2. Sind unter den n Elementen α, β, γ usw. unter sich gleiche Elemente, so wird die Anzahl der Permutationen $= \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}$.

II. **Variationen** (Kombinationen mit Berücksichtigung der Anordnung):

Die Anzahl der Variationen aus n Elementen zur r-ten Klasse ist

ohne Wiederholung $n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \binom{n}{r} \cdot r!$

mit Wiederholung n^r.

III. **Kombinationen** (Kombinationen ohne Berücksichtigung der Anordnung):

Die Anzahl der Kombinationen aus n Elementen zur r-ten Klasse ist

ohne Wiederholung: $\frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

mit Wiederholung: $\binom{n+r-1}{r}$.

Die hier und bei andrer Gelegenheit auftretenden

Binomialkoeffizienten

haben folgende Bedeutung:

(1) $$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} = \binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}, \quad \binom{n}{0} = 1$$

und befolgen folgende Regeln:

(2) $$\binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{n} = 1$$

(3) $$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$$

(4) $$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n-1}{r} + \binom{n-2}{r} + \cdots + \binom{r}{r}$$

(5) $$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Für *große Zahlen* n und m wird:

Stirlingsche Formel:

(6)
$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\cdot\left(1+\frac{1}{12n}+\dots\right)$$

(7)
$$\binom{n}{m} = \frac{e^{-z^2}\cdot 2^n}{\sqrt{\frac{\pi n}{2}}}, \quad \text{wo} \quad z = \frac{m-\frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{2}}}$$

(8)
$$\binom{n}{m} p^m \cdot q^{n-m} = \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{2\pi n p q}},$$

wobei $q = 1 - p$ und $z = \frac{m - np}{\sqrt{2npq}}$.

Ist n auch sehr groß gegen m, so wird:

(9)
$$\binom{n}{m} = \frac{n^m}{m!}.$$

Verwendung: Das Hauptverwendungsgebiet der Kombinatorik ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung, bzw. die statistische Mechanik (s. S. 147 u. 197).

Literatur:

Böcher: Einführung in die höhere Algebra (Leipzig: B. G. Teubner). — *Courant-Hilbert:* Methoden d. math. Physik I, Kap. I (Berlin: Julius Springer). — *Netto:* Determinanten (Leipzig: B. G. Teubner). — *Pascal:* Determinanten (Leipzig: B. G. Teubner). — *Kowalewski:* Einführung in die Determinantentheorie (Leipzig: VWV) u. a.

Zweiter Abschnitt.

Differential- und Integralrechnung.

1. Differentiationstabelle.

Funktion $y = f(x)$	Ableitung $\frac{dy}{dx}$
x^m	$m x^{m-1}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \ln a$
e^{ax}	$a e^{ax}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$
$\operatorname{arc} \sin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arc} \cos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arc} \sec x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ [1]
$\operatorname{arc} \operatorname{cosec} x$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\sqrt{a^2 \pm x^2}$	$\pm\frac{x}{\sqrt{a^2 \pm x^2}}$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$

[1] $\sec x = \frac{1}{\cos x}$; $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$.

2. Differentiations-Regeln.

Es seien u und v Funktionen von x; dann gilt:

$$\frac{d(u \pm v)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx},$$

$$\frac{d(uv)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx},$$

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2},$$

$$\frac{d}{dx}[\ln(uv)] = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\ln\left(\frac{u}{v}\right)\right] = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} - \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}u^v = v\,u^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$$

3. Umformung von Differentialausdrücken.

Erster Differentialquotient.

1. $$\frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy}.$$

2. $y = F(u)$ und $u = f(x)$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$.

3. $u, v, w, \ldots$ seien Funktionen von x und

$$y = f(u, v, w, \ldots), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dx} + \cdots$$

Logarithmische Differentiation:

$\frac{u'}{u}$ = logarithmische Ableitung von u. Z. B.:

$y = u \cdot v \cdot w \ldots,$	$y = \frac{u}{v},$
$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{w} + \frac{w'}{w} + \ldots,$	$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}.$

4. Differentiation implizit gegebener Funktionen:

$$f(x, y) = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}}$$

5. $$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t); \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d\psi}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}{\varphi'^3}.$$

6. $z = z(x, y)$, d. h. z sei Funktion von x und y.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_y dx + \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_x dy$$ heißt das totale Differential von z.

Das Zeichen $|_y$ bzw. $|_x$ bedeutet, daß bei der Differentiation y bzw. x konstant gehalten werden soll.

Ein Ausdruck $dz = f_1(x, y)\,dx + f_2(x, y)\,dy$ heißt ein totales Differential, wenn $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$. Dann und nur dann kann dz als Differential einer Funktion $z = f(x, y)$ betrachtet werden.

7. Sei $\varphi = \varphi(x, y)$. Führt man statt y als neue Variable $z = z(x, y)$ ein, so gilt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\bigg|_y = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\bigg|_z + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\bigg|_x \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_y$$

und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}\bigg|_x = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\bigg|_x \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_x.$$

Führt man $z(x, y)$ und $w(x, y)$ statt x und y als Variable ein, so gilt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\bigg|_y = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\bigg|_w \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_y + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\bigg|_z \cdot \frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_y$$

und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}\bigg|_x = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\bigg|_w \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_x + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\bigg|_z \cdot \frac{\partial w}{\partial y}\bigg|_x$$

Allgemein sei $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3 \ldots)$, und der Zusammenhang der neuen Variablen $y_1, y_2, y_3, \ldots$ mit den alten gegeben durch $x_i = x_i(y_1, y_2, y_3, \ldots)$.

Dann ist

$$d\varphi = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}\bigg|_{x_l} dx_i; \qquad dx_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial y_k}\bigg|_{y_r} dy_k,$$

also

$$d\varphi = \sum_i \sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\bigg|_{x_l} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_k}\bigg|_{y_r} dy_k = \sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}\bigg|_{y_r} dy_k,$$

mithin

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_k}\bigg|_{y_r} = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\bigg|_{x_l} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_k}\bigg|_{y_r}$$

bzw.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\bigg|_{x_l} = \sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}\bigg|_{y_r} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\bigg|_{x_l}.$$

Höhere Differentialquotienten.

1. $\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{-\frac{d^2 x}{d y^2}}{\left(\frac{d x}{d y}\right)^3}$; $\quad \frac{d^3 y}{d x^3} = \frac{3\left(\frac{d^2 x}{d y^2}\right)^2 - \frac{d x}{d y}\cdot\frac{d^3 x}{d y^3}}{\left(\frac{d x}{d y}\right)^5}$.

2. $\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{d^2 y}{d u^2}\cdot\left(\frac{d u}{d x}\right)^2 + \frac{d y}{d u}\cdot\frac{d^2 u}{d x^2}$

$$\frac{d^3 y}{d x^3} = \frac{d^3 y}{d u^3}\cdot\left(\frac{d u}{d x}\right)^3 + \frac{d^2 y}{d u^2}\cdot 3\,\frac{d u}{d x}\,\frac{d^2 u}{d x^2} + \frac{d y}{d u}\cdot\frac{d^3 u}{d x^3}.$$

3. Übergang zu neuen Variablen

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i\,\partial x_k} = \sum_l \sum_r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_l\,\partial y_r}\cdot\frac{\partial y_l}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial y_r}{\partial x_k} + \sum_l \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i\,\partial x_k}.$$

4. Integrationsmethoden.

1. **Durch partielle Integration:**

$$\int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx.$$

2. **Durch Zerlegung in Partialbrüche:** $\int \frac{\varphi(x)}{f(x)}\,dx$. Sind $\varphi(x)$ und $f(x)$ ganze rationale Funktionen, $f(x)$ von höherem Grad als $\varphi(x)$, so läßt sich $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ immer in eine Summe von Partialbrüchen zerlegen, die sich ohne Schwierigkeit integrieren lassen.

a) Hat $f(x) = 0$ lauter verschiedene Wurzeln, ist also

$$f(x) \equiv (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n),$$

so wird

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} \equiv \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \dots + \frac{A_n}{x - x_n},$$

worin $A_i \equiv \frac{\varphi(x_i)}{f'(x_i)}$ ist.

b) Hat $f(x) = 0$ mehrfache Wurzeln, und zwar α Wurzeln x_1, β Wurzeln x_2 usw., so hat die Partialbruchzerlegung die Form:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} \equiv \frac{A_1}{(x - x_1)^\alpha} + \frac{A_2}{(x - x_1)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x - x_1)}$$
$$+ \frac{B_1}{(x - x_2)^\beta} + \frac{B_2}{(x - x_2)^{\beta-1}} + \dots$$

A_i, B_i, $C_i \dots$ findet man durch Koeffizientenvergleichung.

Ist z. B. $f(x) \equiv (x - x_1)^{\alpha} \cdot f_1(x)$, so hat man zur Bestimmung der A_i die α Gleichungen:

$$\varphi(x_1) = A_1 f_1(x_1)$$
$$\varphi'(x_1) = A_1 f_1'(x_1) + A_2$$
$$\varphi''(x_1) = A_1 f_1''(x_1) + 2 A_2 f_1'(x_1) + 2 A_3 f_1(x_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Sind die Wurzeln von $f(x) = 0$ zum Teil imaginär und sind $f(x)$ und $\varphi(x)$ reell, so kann man immer je zwei komplexe Summanden zu einem reellen Gliede zusammenziehen. Ist z. B. $x_1 = u_1 + i v_1$; $x_2 = u_1 - i v_1$, so ist

$$\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} = \frac{Px + Q}{(x - u_1)^2 + v_1^2}.$$

3. **Durch Einführung neuer Veränderlicher.** Substitutionen, die häufig die Integration ermöglichen:

a) $\xi = a + bx$; $\quad x = \frac{1}{b}(\xi - a)$; $\quad dx = \frac{1}{b} d\xi$;

b) $\xi = a + bx^2$; $\quad x^2 = \frac{1}{b}(\xi - a)$; $\quad dx = \frac{d\xi}{2\sqrt{b(\xi - a)}}$;

c) $\xi = \frac{a}{x} + b$; $\quad x = \frac{a}{\xi - b}$; $\quad dx = -\frac{a\, d\xi}{(\xi - b)^2}$;

d) $\xi = \frac{a + bx}{a - bx}$; $\quad x = \frac{a(\xi - 1)}{b(\xi + 1)}$; $\quad dx = \frac{2a}{b(\xi + 1)^2}$;

e) $\xi = \sqrt[n]{a + bx}$; $\quad x = \frac{\xi^n - a}{b}$; $\quad dx = \frac{n}{b} \xi^{n-1} d\xi$;

f) $\xi = \sin x$; $\quad x = \arcsin \xi$; $\quad dx = \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$;

g) $\xi = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; $\quad x = \operatorname{arc\,tg} 2\xi$; $\quad dx = \frac{2\, d\xi}{1 + \xi^2}$;

$$\sin x = \frac{2\xi}{1 + \xi^2}; \qquad \cos x = \frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2}.$$

Zu 1 und 2: Durch Einführung neuer Veränderlicher und Partialbruchzerlegung sind Ausdrücke von der Form:

$$R(x), \quad R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}\right), \quad R(x, \sqrt{a + 2bx \pm cx^2}),$$

worin $R(x)$ eine rationale Funktion von x und des Wurzelausdrucks bedeutet, stets allgemein zu integrieren.

4. **Durch Entwicklung des Integranden in eine Potenzreihe.** Eine Potenzreihe darf gliedweise integriert werden, wenn beide Integrationsgrenzen im Innern des Konvergenzgebietes liegen.

5. Integrationstabelle.

$f(x) = \frac{dy}{dx}$	$y = \int f(x)\,dx$	
$(x+a)^m$	$\frac{1}{m+1}(x+a)^{m+1}$	
$\frac{1}{a+x}$	$\ln(a+x)$	
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}$	
$\frac{1}{a^2-x^2}$	$\frac{1}{a}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x}$	für $\lvert x\rvert < a$
	$\frac{1}{a}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{x-a}$	für $\lvert x\rvert > a$
$\sqrt{x^2 \pm a^2}$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})$	
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{x}{a}\right)$	
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{x}{a}\right)$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{a}\right) = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{a}\right) = \ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$	
$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}$	$\frac{1}{x_1-x_2}\ln\frac{x-x_1}{x-x_2}$	
$\frac{1}{x^2+2bx+c}$	$\frac{1}{2\sqrt{b^2-c}}\ln\frac{x+b-\sqrt{b^2-c}}{x+b+\sqrt{b^2-c}}$	für $c < b^2$
	$\frac{1}{\sqrt{c-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}\right)$	für $c > b^2$
$\frac{Ax+B}{(x-x_1)(x-x_2)}$	$\frac{1}{x_1-x_2}\{(Ax_1+B)\ln(x-x_1)-(Ax_2+B)\ln(x-x_2)\}$	
$\frac{1}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$	$\frac{1}{\sqrt{a}}\ln(b+ax+\sqrt{a}\sqrt{ax^2+2bx+c})$	
$\frac{1}{\sqrt{-ax^2+2bx+c}}$	$\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arc\,sin}\frac{ax-b}{\sqrt{b^2+ac}}$	
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\operatorname{tg} x$	$-\ln(\cos x)$	

$\int f(x)\,dx$
$\ln(\sin x)$
$\mathfrak{Cof}\, x$
$\mathfrak{Sin}\, x$
$\ln(\mathfrak{Cof}\, x)$
$\ln(\mathfrak{Sin}\, x)$
$\ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$
$\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$
$\ln \operatorname{tg} x$
$-\operatorname{ctg} x$
$\operatorname{tg} x$
$-\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{x}{2}$
$\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{x}{2}$
$-\frac{1}{m}\sin^{m-1} x \cdot \cos x + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} x\, dx$
$\frac{1}{m}\cos^{m-1} x \cdot \sin x + \frac{m-1}{m}\int \cos^{m-2} x\, dx$
$\frac{1}{m-1}\operatorname{tg}^{m-1} x - \int \operatorname{tg}^{m-2} x\, dx$
$-\frac{1}{m-1}\operatorname{ctg}^{m-1} x - \int \operatorname{ctg}^{m-2} x\, dx$
$-\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^{n} x\, dx$
$= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^{m} x \cos^{n-2} x\, dx$
$-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$
$\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$
$\frac{\sin^{m+1} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\sin^{m} x\, dx}{\cos^{n-2} x}$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\frac{\cos^m x}{\sin^n x}$	$\frac{\cos^{m+1} x}{(n-1)\sin^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\cos^m x\,dx}{\sin^{n-2} x}$
$\operatorname{arc}\sin x$	$x \operatorname{arc}\sin x + \sqrt{1-x^2}$
$\operatorname{arc}\cos x$	$x \operatorname{arc}\cos x - \sqrt{1-x^2}$
$\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$	$x \operatorname{arc}\operatorname{tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
e^x	e^x
$a^x \equiv e^{x\ln a}$	$\frac{1}{\ln a} a^x$

6. Bestimmte Integrale[1]).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n+1)}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \qquad \text{für } a > 0$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x}\,dx = \infty$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \qquad \text{für } a > b$$

(*Dirichlets diskontinuierlicher Faktor*)

$$= 0 \qquad \text{für } a < b$$

$$= \frac{\pi}{4} \qquad \text{für } a = b$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}$$

$$\int_0^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx = \int_0^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = 0$$

für ganzzahliges m und n, außer $= \frac{\pi}{2}$ für $m = n$

[1]) Eine große Sammlung bestimmter Integrale findet man in dem Buch: D. Bierens de Haan, Nouvelles tables d'intégrales définies, Leiden 1867.

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha \, dx = \Gamma(\alpha+1) = \Pi(\alpha) \qquad \text{vgl. S. 70.}$$

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta \, dx = 2\int_0^1 x^{2\alpha+1}(1-x^2)^\beta \, dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha+1}\varphi \cos^{2\beta+1}\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{\Pi(\alpha)\,\Pi(\beta)}{\Pi(\alpha+\beta+1)} = \frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sqrt{\sin x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\cos x}\, dx = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\Gamma^2\left(\tfrac{1}{4}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt[3]{\sin\varphi}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}\Gamma^3\left(\tfrac{1}{3}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin\varphi}\, d\varphi = \frac{\sqrt{3}}{\pi\sqrt[3]{4}}\Gamma^3\left(\tfrac{2}{3}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\Gamma^2\left(\tfrac{1}{4}\right)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}; \qquad 0 < p < 1$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^\infty x^\alpha e^{-ax^2}\, dx &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a^{\frac{\alpha+1}{2}}}\,\Pi\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\\
\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-ax^2}\, dx &= \frac{n!}{2\cdot a^{n+1}}\\
\int_0^\infty x^{n} e^{-ax^2}\, dx &= \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^{n+1}\,a^{n+\frac{1}{2}}}
\end{aligned}\right\}\; a > 0,\; n \text{ ganze Zahl.}$$

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Auswertung bestimmter Integrale ist der Cauchysche Integralsatz der Funktionentheorie, vgl. S. 35.

7. Differenzenrechnung.

Von einer Funktion $f(x)$ bilde man für einen gegebenen Wert von x folgende Ausdrücke:

$$1.\quad \frac{1}{h}\bar{\Delta} f(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$2.\quad \frac{1}{h}\underline{\Delta} f(x) = \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

$$3.\quad \frac{1}{h}\Delta f(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h},\quad \left(\Delta = \frac{1}{2}(\bar{\Delta}+\underline{\Delta})\right).$$

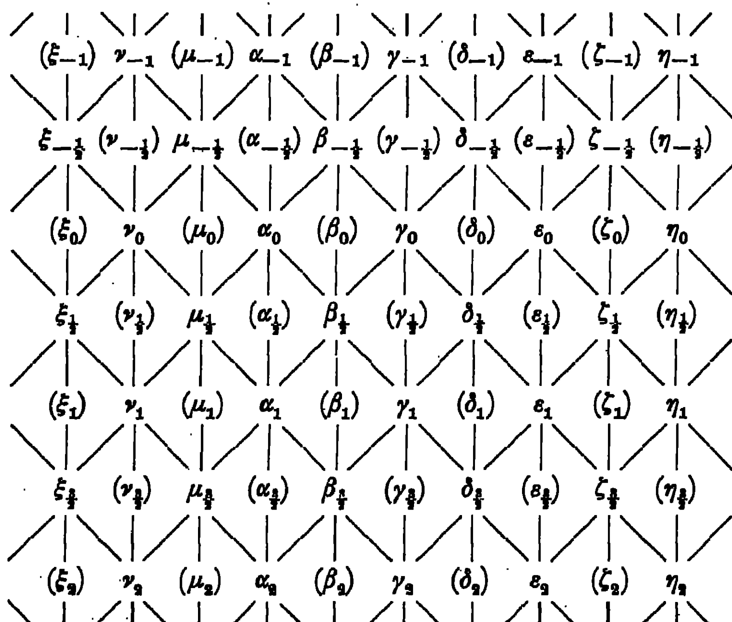
Man bezeichnet diese Größen als ***vordere, hintere*** und ***mittlere Differenzenquotienten,*** gebildet mit der Differenz h der Variablen. Beim Grenzübergang $h \rightarrow 0$ gehen diese Ausdrücke für differenzierbare Funktionen in den Differentialquotienten $\frac{df(x)}{dx}$ über.

Analog definieren wir einen 2. Differenzenquotienten durch:

$$\frac{1}{h^2}\Delta^2 f(x) = \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2},\quad (\Delta^2 = \bar{\Delta} - \underline{\Delta}).$$

Die Bildung höherer Differenzenquotienten erfolgt ganz analog.

Liegt eine Funktion $f(x)$ in konstanten Intervallen h tabuliert vor, so berechnet man die mit den entsprechenden Potenzen von h multiplizierten Differenzenquotienten (also die Δ^n) durch Subtraktionen nach folgendem Schema:



In dieses Schema tragen wir an die Stellen α_n (n ganzzahlig) die Funktionswerte von $f(x+nh)$ ein. Sodann schreibt man an die Stellen $\beta_{n+\frac{1}{2}}$ die Differenz der links oberhalb und links unterhalb stehenden α_{n+1} und α_n, $(\beta_{n+\frac{1}{2}}=\alpha_{n+1}-\alpha_n)$. Analog berechnet man die γ_n aus: $\gamma_n=\beta_{n+\frac{1}{2}}-\beta_{n-\frac{1}{2}}$ und verfährt entsprechend für die δ, ε usw. Schließlich findet man die noch ausstehenden, durch Einklammerung bezeichneten $\alpha_{n+\frac{1}{2}}$, β_n, $\gamma_{n+\frac{1}{2}}\ldots$ durch Mittelwertsbildung aus den beiden jeweils oberhalb und unterhalb stehenden Zahlen, z. B.: $\beta_n=\frac{1}{2}(\beta_{n+\frac{1}{2}}+\beta_{n-\frac{1}{2}})$. Die (mittleren) Differenzenquotienten an der Stelle $x+nh$ sind dann bis auf die entsprechende Potenz von h die rechts neben α_n stehenden β_n, γ_n usw.

Wir können das Schema auch nach links weiter ausfüllen, indem wir zunächst an einer Stelle $\mu_{n+\frac{1}{2}}$ eine beliebige Zahl, z. B. 0, eintragen und nunmehr die weiteren $\mu_{n+\frac{1}{2}}$ so berechnen, daß $\mu_{n+\frac{1}{2}}-\mu_{n-\frac{1}{2}}=\alpha_n$ wird, also durch Addition der jeweils rechts unterhalb stehenden Zahl das folgende μ finden. Ebenso verfahren wir mit der Reihe für ν, ξ usw. Die eingeklammerten Werte findet man wieder wie oben durch Mittelwertsbildung. Die links stehenden Zahlen μ, ν, $\xi\ldots$ bezeichnet man als erste, zweite ... *Summenwerte*.

Zusammenhang zwischen Differenzenquotienten und Differentialquotienten.

Die Taylorsche Reihenformel (s. S. 29) liefert unmittelbar die Möglichkeit, die Differenzenquotienten als lineare Funktionen der Differentialquotienten auszurechnen. Diese Berechnung hat aber nur untergeordnete Bedeutung gegenüber dem umgekehrten Problem, aus den gegebenen Differenzenquotienten die Differentialquotienten zu berechnen. Die Auflösung des linearen Gleichungssystems liefert:

$$h\frac{d}{dx}f(x+nh)=\beta_n-\frac{1}{6}\delta_n+\frac{1}{30}\zeta_n-\cdots$$

$$h^2\frac{d^2}{dx^2}f(x+nh)=\gamma_n-\frac{1}{12}\varepsilon_n+\frac{1}{90}\eta_n-\cdots$$

bzw.

$$h\frac{d}{dx}f(x+(n+\tfrac{1}{2})h)=\beta_{n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{24}\delta_{n+\frac{1}{2}}+\frac{3}{640}\zeta_{n+\frac{1}{2}}-\cdots$$

$$h^2\frac{d^2}{dx^2}f(x+(n+\tfrac{1}{2})h)=\gamma_{n+\frac{1}{2}}-\frac{5}{24}\varepsilon_{n+\frac{1}{2}}+\frac{259}{5760}\eta_{n+\frac{1}{2}}-\cdots$$

Diese Formeln gestatten also die *„numerische Differentiation"* einer tabuliert vorliegenden Funktion. In entsprechender Weise kann man einen linearen

Zusammenhang zwischen Summenwerten und Integralen
durch folgende Formeln geben:

$$\frac{1}{h}\int\limits_{x+n_1h}^{x+n_2h} f(x)\,dx = \left[\mu_n - \frac{1}{12}\beta_n + \frac{11}{720}\delta_n - \frac{191}{60480}\zeta_n + \cdots\right]_{n_1}^{n_2}$$

$$\frac{1}{h^2}\int\limits_{x+n_1h}^{x+n_2h}\int\limits_{x+n_1h}^{x+n_2h} f(x)\,dx = \left[\nu_n + \frac{1}{12}\alpha_n - \frac{1}{240}\gamma_n + \frac{31}{60480}\varepsilon_n - \cdots\right]_{n_1}^{n_2}$$

$$\frac{1}{h^3}\int\limits_{x+n_1h}^{x+n_2h}\int\limits_{x+n_1h}^{x+n_2h}\int\limits_{x+n_1h}^{x+n_2h} f(x)\,dx = \left[\xi_n + \frac{1}{240}\beta_n - \frac{31}{30240}\delta_n + \cdots\right]_{n_1}^{n_2}$$

Diese Formeln sind nützlich für das praktisch häufig vorkommende Problem der „*numerischen Integration*".

Auch zur

Interpolation

ist das Differenzenschema mit Vorteil zu benutzen. Gesucht sei der Wert von $f(x+(n+t)h)$, $(0<t<1)$.

Man berechne zunächst die Größen:
$A=t$, $B=\frac{1}{2}(t-1)$, $C=\frac{1}{3}(t+1)$, $D=\frac{1}{4}(t-2)$, $E=\frac{1}{5}(t+2)\ldots$,
dann ist:

$$f(x+(n+t)h) = \alpha_n + A\,I, \quad \begin{aligned} I &= \beta_{n+\frac{1}{2}} + B\,II\\ II &= \gamma_n + C\,III\\ III &= \delta_{n+\frac{1}{2}} + D\,IV\\ IV &= \varepsilon_n + E\,V\\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$f(x+(n-t)h) = \alpha_n - A\,I, \quad \begin{aligned} I &= \beta_{n-\frac{1}{2}} - B\,II\\ II &= \gamma_n - C\,III\\ III &= \delta_{n-\frac{1}{2}} - D\,IV\\ IV &= \varepsilon_n - E\,V\\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Wieviel man von diesen Gliedern zu berücksichtigen hat, richtet sich nach der gewünschten Genauigkeit. Wegen weiterer Einzelheiten vgl. die einschlägigen Lehrbücher der praktischen Analysis, vgl. S. 2.

Literatur.

v. Mangoldt: Einführung in die höhere Mathematik. Leipzig: Hirzel. — *Serret-Scheffers:* Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Leipzig: Teubner. — *de la Vallée-Poussin:* Cours d'analyse. Paris: Gauthiers-Villars. — *Bieberbach:* Leitfaden der Differential- und Integralrechnung. Leipzig: Teubner.

Dritter Abschnitt.

Reihen.

1. Grundbegriffe.

Gegeben sei eine unendliche Anzahl reeller oder komplexer Zahlen $u_0, u_1, u_2 \ldots$ Man bezeichnet dann ihre formal gebildete Summe als eine *konvergente* Reihe, wenn die Summe der n ersten Glieder $S_n = u_0 + \ldots + u_{n-1}$ für $\lim n = \infty$ einer bestimmten endlichen Grenze zustrebt. $\lim\limits_{n=\infty} S_n = S$ heißt der Summenwert der Reihe. Ist die Reihe nicht konvergent, so heißt sie *divergent*. Die Größe $S - S_n = R_n$ heißt der Reihenrest.

Man spricht von *unbedingter* Konvergenz, im Gegensatz zu *bedingter* Konvergenz, wenn der Summenwert nicht von der Anordnung der Glieder abhängt. Das ist stets und nur der Fall, wenn die Reihe der absoluten Beträge konvergiert, die Reihe also *absolut* konvergiert.

Sind die u_n Funktionen einer Variablen z, so spricht man von *gleichmäßiger* Konvergenz, wenn für genügend großes n der Rest $|R_n(z)| < \delta$ wird, wo δ eine für alle z des in Frage kommenden z-Bereiches gleiche und beliebig klein wählbare Zahl ist. Dann ist in diesem Bereich der Summenwert $S(z)$ eine stetige Funktion von z.

Bei gleichmäßiger Konvergenz darf gliedweise integriert werden:
$$\int S(z)\, dz = \sum_0^\infty \int u_n\, dz.$$

Ist die Reihe $\sum\limits_0^\infty \frac{du_n}{dz}$ gleichmäßig konvergent, so ist ihr Summenwert $= \frac{dS(z)}{dz}$.

Eine gleichmäßig konvergente Reihe analytischer Funktionen ist eine stetige analytische Funktion.

2. Konvergenzkriterien.

Eine Reihe konvergiert, wenn $\lim\limits_{n=\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$ (nicht etwa gleich 1) ist, ebenso wenn $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1$.

Eine Reihe aus *abwechselnd positiven und negativen* Gliedern konvergiert, wenn die Beträge ihrer Glieder mit wachsendem n gegen 0 konvergieren.

Eine Reihe konvergiert absolut, wenn jedes Glied in ihr dem Betrage nach kleiner ist als das gleichvielte einer konvergenten Reihe aus positiven Gliedern.

Für die Konvergenz einer unendlichen Reihe ist es belanglos, ob eine endliche Zahl von Gliedern hinzugefügt oder fortgelassen wird.

3. Wichtige Reihen.

Die für praktische Anwendungen wichtigsten Reihen sind:

1. *Potenzreihen* a) nach steigenden Potenzen

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

b) nach fallenden Potenzen

$$a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots; \qquad \text{(vgl. S. 36 ff.)}$$

2. *Fouriersche* Reihen

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots$$
$$+ \frac{b_0}{2} + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \dots; \qquad \text{(vgl. S. 29)}$$

3. *Kugelfunktionsreihen*

$$a_0 + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + \dots. \qquad \text{(vgl. S. 62)}$$

4. *Zylinderfunktionsreihen*

$$a_0 + a_1 J_0(\alpha_1 x) + a_2 J_0(\alpha_2 x) + \dots \qquad \text{(vgl. S. 69)}$$

4. Summation von Reihen.

Es ist praktisch von großer Bedeutung, den Summenwert einer Reihe entweder durch leicht berechenbare oder durch tabulierte Funktionen darzustellen.

Hierzu dient zunächst folgende Übersicht:

Endliche Reihen.

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1},$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \tfrac{1}{6} n (n+1)(2n+1),$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \tfrac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

Unendliche Reihen.

$$1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ldots=(1+x)^n, \qquad 1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x},$$

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x}{3!}+\ldots=e^x,$$

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2{,}718\,281\,828\ldots,$$

$$1+\frac{x\ln a}{1!}+\frac{(x\ln a)^2}{2!}+\ldots=e^{x\ln a}=a^x,$$

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-+\ldots=\sin x, \qquad x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots=\mathfrak{Sin}\,x,$$

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-+\ldots=\cos x, \qquad 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots=\mathfrak{Cof}\,x,$$

$$x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots=\operatorname{tg}x,$$

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}-\frac{17x^7}{315}+-\ldots=\frac{\mathfrak{Sin}\,x}{\mathfrak{Cof}\,x}=\mathfrak{Tg}\,x,$$

$$x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{x^7}{7}+\ldots=\arcsin x,$$

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-+\ldots=\operatorname{arctg}x,$$

$$\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+-\ldots=\ln(1+x),$$

$$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

$$x-\frac{1}{3}\frac{x^3}{3!}+\frac{1}{5}\frac{x^5}{5!}-+\ldots=\int_0^x\frac{\sin x}{x}\,dx=Si\,x$$ („Integralsinus“),

$$C+\ln x-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{4}\frac{x^4}{4!}-+\ldots=-\int_x^\infty\frac{\cos x}{x}\,dx=Ci\,x$$ („Integralcosinus“),

$$C+\ln x+x+\frac{1}{2}\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{3}\frac{x^3}{3!}+\ldots=\int_{\infty}^{-x}\frac{e^{-x}}{x}\,dx=li(e^x)$$ („Integrallogarithmus“),

$$C=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=0{,}577\,215\,66\ldots$$ (Eulersche Konstante),

$$1-\frac{x^2}{5\cdot2!}+\frac{x^4}{9\cdot4!}-\frac{x^6}{13\cdot6!}+-\ldots=\frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^x\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\frac{x}{3}-\frac{x^3}{7\cdot3!}+\frac{x^5}{11\cdot5!}-+\ldots=\frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^x\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$$

(*Fresnelsche* Integrale),

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1!\,3} + \frac{x^5}{2!\,5} - \frac{x^7}{3!\,7} + - \ldots = \int_0^x e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\Phi(x)$$

(*Gaußsches* Fehlerintegral),

$$1 - \frac{1}{x} + \frac{1\cdot 3}{x^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{x^3} + - \ldots = \frac{1}{1 - \dfrac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{\dfrac{\pi x}{2}}}}\,\Phi\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right).$$

ϑ-Funktionen (s. S. 75).

$$\tfrac{1}{2} - q\cos 2\pi x + q^4\cos 4\pi x - q^9\cos 6\pi x + \ldots = \tfrac{1}{2}\vartheta(x),$$

$$q^{\frac{1}{4}}\sin\pi x - q^{\frac{9}{4}}\sin 3\pi x + q^{\frac{25}{4}}\sin 5\pi x - + \ldots = \tfrac{1}{2}\vartheta_1(x),$$

$$q^{\frac{1}{4}}\cos\pi x + q^{\frac{9}{4}}\sin 3\pi x + q^{\frac{25}{4}}\sin 5\pi x + \ldots = \tfrac{1}{2}\vartheta_2(x),$$

$$\tfrac{1}{2} + q\cos 2\pi x + q^4\cos 4\pi x + q^9\cos 6\pi x + \ldots = \tfrac{1}{2}\vartheta_3(x).$$

Elliptische Funktionen (s. S. 75).

$$x - (1+k^2)\frac{x^3}{3!} + (1 + 14k^2 + k^4)\frac{x^5}{5!} - + \ldots = sn\,x.$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + (1+4k^2)\frac{x^4}{4!} - (1 + 44k^2 + 16k^4)\frac{x^6}{6!} + - \ldots = cn\,x,$$

$$1 - k^2\frac{u^2}{2} + k^2(4+k^2)\frac{x^4}{4!} - k^2(16 + 44k^2 + k^4)\frac{x^6}{6!} + - \ldots = dn\,x.$$

Kugelfunktionen (s. S. 54).

$$\cos nx + \frac{1}{1}\,\frac{n}{2n-1}\cos(n-2)x + \frac{1\cdot 3}{1\cdot 2}\,\frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)}\cos(n-4)x$$
$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}\cos(n-6)x + \ldots$$
$$= \frac{2^n\,n!}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}\,\frac{P_n(\operatorname{arc}\cos x)}{2},$$

$$x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - + \ldots$$
$$= \frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}\,P_n(x).$$

Zylinderfunktionen (s. S. 63).

$$1 - \frac{x}{1\cdot(p+1)} + \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot(p+1)(p+2)} - \ldots = \frac{\Pi(p)}{x^{\frac{p}{2}}}\,J_p(x),$$

$$1 - \frac{x^2}{1!^2} + \frac{x^4}{2!^2} - \frac{x^6}{3!^2} + - \ldots = J_0(2x),$$

$$1 - \frac{x}{1!^2} + \frac{x^2}{2!^2} - \frac{x^3}{3!^2} + - \ldots = J_0(2\sqrt{x}),$$

$$1 - \frac{x}{1!\,2!} + \frac{x^2}{2!\,3!} - \frac{x^3}{3!\,4!} + - \cdots = \frac{1}{\sqrt{x}} J_1(2\sqrt{x}) = -\frac{1}{\sqrt{x}} J_0'(2\sqrt{x}),$$

$$1 - \frac{3x^2}{2\cdot4} + \frac{3^2 x^4}{2\cdot4\cdot4\cdot10} - \frac{3^3 x^6}{2\cdot4\cdot6\cdot4\cdot10\cdot16} + \cdots = \frac{\Pi\left(-\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}} J_{-\frac{1}{3}}(x),$$

$$1 - \frac{x^2}{1\cdot5} + \frac{x^4}{1\cdot2\cdot5\cdot9} - \frac{x^6}{1\cdot2\cdot3\cdot5\cdot9\cdot13} + \cdots = \frac{\Pi\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt[4]{\frac{x}{2}}} J_{\frac{1}{4}}(x).$$

Ist die vorliegende Reihe nicht mit einer der hier gegebenen Reihen identisch, so gelingt es oft durch Multiplikation, Division, Differentiation, Integration usw., sie auf eine bekannte Form zu bringen. Sodann macht man die Operation wieder rückgängig, um den Wert der Reihe zu finden.

Beispiel:

$$y = 3x - \frac{5x^3}{3!} + \frac{7x^5}{5!} - \cdots,$$

$$\int y\,dx = \frac{3x^2}{2!} - \frac{5x^4}{4!} + \frac{7x^6}{6!} + \cdots,$$

$$\int dx \int y\,dx = \frac{x^3}{2!} - \frac{x^5}{4!} + \frac{x^7}{6!} - \cdots,$$

$$\frac{1}{x}\int dx \int y\,dx = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} = 1 - \cos x.$$

$$\int dx \int y\,dx = x - x\cos x,$$

$$\int y\,dx = 1 - \cos x + x\sin x,$$

$$y = 2\sin x + x\cos x.$$

Taylorsche Reihe.

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \cdots$$

Spezialfall.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots$$

5. Fouriersche Reihen.

Erfüllt eine Funktion $f(x)$ im Intervall $-l$ bis $+l$ die *Dirichletschen Bedingungen* [d. h. hat $f(x)$ dort nicht unendlich viele Maxima und Minima und bleibt trotz endlich vieler Unendlichkeits- und Unstetigkeitsstellen $\int |f(x)|\,dx$ konvergent], so ist $f(x)$ in diesem Intervall mit Ausnahme der Unstetigkeitsstellen darstellbar in der Form:

(1) $$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right],$$

wobei

$$(2)\qquad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

oder auch in der Form:

$$(1\,\mathrm{a})\qquad f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{\frac{i n\pi x}{l}},$$

wobei

$$(2\,\mathrm{a})\qquad \alpha_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} f(x) e^{-\frac{i n\pi x}{l}} dx.$$

6. Fouriersches Integral.

Läßt man l unbegrenzt wachsen, so wird

$$(3)\qquad F(x) = \int_0^{\infty} [A(\nu)\cdot\sin(\nu\pi x) + B(\nu)\cdot\cos(\nu\pi x)]\cdot d\nu,$$

wobei

$$(4)\qquad A(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\sin(\nu\pi x)\,dx, \qquad B(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\cos(\nu\pi x)\,dx$$

oder auch

$$(3\,\mathrm{a})\qquad F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\nu)\, e^{i\nu\pi x}\, d\nu,$$

wobei

$$(4\,\mathrm{a})\qquad \varphi(\nu) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, e^{-i\nu\pi x}\, dx.$$

Zusammengefaßt wird:

$$(5)\qquad F(x) = \int_0^{\infty} d\nu \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\cos(\nu\pi(t-x))\,dt$$

oder auch

$$(5\,\mathrm{a})\qquad F(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} d\nu \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\, e^{i\nu\pi(t-x)}\, dt.$$

Ist eine Funktion $f(x)$ definiert als gebildet durch regelmäßige Wiederholung einer aperiodischen Funktion $F(x)$ im Abstand $2l$, d. h.

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} F(x + 2pl),$$

wo p alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchläuft, so ist $f(x)$ eine periodische Funktion:

$$f(x + 2pl) = f(x).$$

In der dann möglichen Darstellung

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{\frac{i\pi n x}{l}} \tag{6}$$

und

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\nu) e^{i\nu\pi x} d\nu \tag{6a}$$

besteht dann folgender Zusammenhang zwischen den Koeffizienten α_n der Reihe für $f(x)$ und dem Funktionswerte $\varphi(\nu)$ des Integrals für $F(x)$

$$\alpha_n = \frac{1}{l} \varphi\left(\frac{n}{l}\right). \tag{7}$$

7. Zweidimensionale Fouriersche Reihen und Integrale.

Eine von zwei Variabeln x und y abhängige Funktion $f(x, y)$, die sowohl in x wie in y periodisch ist, so daß $f((x + 2lL), (y + 2mM)) = f(x, y)$ ist, wo l und m ganze Zahlen, $\pm L$ und $\pm M$ die Grenzen des Periodenintervalls sind, und die die Dirichletschen Bedingungen erfüllt, ist darstellbar in der Form:

$$f(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{lm} \cdot \cos\frac{l\pi x}{L} \cdot \cos\frac{m\pi y}{M} + b_{lm} \cdot \sin \ldots \cos \ldots + c_{lm} \cdot \cos \ldots \sin \ldots + d_{lm} \cdot \sin \ldots \sin \ldots, \tag{1}$$

wo

$$a_{lm} = \frac{1}{LM} \int_{-L}^{+L} \int_{-M}^{+M} f(s, t) \cdot \cos\frac{l\pi s}{L} \cdot \cos\frac{m\pi t}{M} \, ds\, dt, \tag{2}$$

$$a_{00} = \frac{1}{4LM} \iint f(s, t)\, ds\, dt, \qquad a_{0m} = \frac{1}{2LM} \iint f(s, t) \cos\frac{m\pi t}{M} \, ds\, dt.$$

Für die b_{lm}, c_{lm}, d_{lm} gelten entsprechende Formeln.

Für $L = \infty$ wird:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} du \sum_{m} \left(a_m(u) \cdot \cos ux \cos\frac{m\pi y}{M} + \ldots\right) \tag{3}$$

bzw.

(4) $f(x, y) =$

$$= \int_0^{\infty} du \sum_m \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} ds\, dt\, f(s, t) \cdot \cos u\pi s \cdot \cos\frac{m\pi t}{M} \cos \pi u x \cos\frac{m\pi y}{M} + \ldots,$$

für $L = M = \infty$ wird:

$$f(x, y) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} du\, dv \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, t) \cdot \cos u\pi(x - s) \cos v\pi(y - t)\, ds\, dt. \tag{5}$$

Oder auch

$$f(x,y)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\alpha_{lm}\,e^{i\pi\left(\frac{lx}{L}+\frac{my}{M}\right)}, \tag{1a}$$

wobei

$$\alpha_{lm}=\frac{1}{4LM}\int_{-L}^{+L}\int_{-M}^{+M}f(x,y)\,e^{-i\pi\left(\frac{lx}{L}+\frac{my}{M}\right)}\,dx\,dy \tag{2a}$$

und für $L=\infty$

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}du\sum_{0}^{\infty}a_m(u)\,e^{i\pi ux}\cdot e^{\frac{i\pi my}{M}}$$

mit

$$a_m(u)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int f(x,y)\,e^{-i\pi\left(ux+\frac{my}{M}\right)}\,dx\,dy \tag{4a}$$

und für $L=\infty$, $M=\infty$

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}a(u,v)\,e^{i\pi(ux+vy)}\,du\,dv$$

mit

$$a(u,v)=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\int f(x,y)\,e^{-i\pi(ux+vy)}\,dx\,dy. \tag{5a}$$

Literatur.

Knopp, Unendliche Reihen. Berlin: Julius Springer. — Lehrbücher der Differentialrechnung s. S. 24. — *Courant-Hilbert* s. S. 12.

Vierter Abschnitt.

Funktionen.

A. Allgemeine Funktionentheorie.

1. Komplexe Größen.

Definition: Die formal gebildete Summe $a + ib$ einer reellen Zahl a und einer imaginären Zahl ib $(i = \sqrt{-1})$ heißt eine „*komplexe*" Zahl $c = a + ib$, $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$ heißt ihr (absoluter) „*Betrag*".

a heißt der *Realteil*, b der *Imaginärteil* (in Zeichen $a = \Re c$, $b = \Im c$).

Geometrisch veranschaulicht man sich die komplexe Zahl c

1. durch einen *Punkt* der komplexen xy-Ebene, dessen rechtwinklige Koordinaten $x = a$, $y = b$ sind. $|c|$ bedeutet den Betrag des Abstandes r vom Punkt c bis zum Nullpunkt.

Es ist also (Fig. 1)

$$a = r\cos\varphi$$

$$b = r\sin\varphi$$

$$a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi},$$

wo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$ φ heißt *Argument, Amplitude* oder *Arkus*.

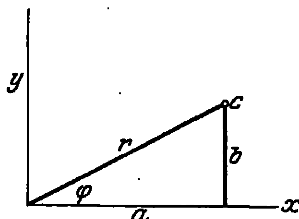


Fig. 1.

2. Durch einen *Vektor* vom Nullpunkt, dessen Komponenten gleich a, bzw. b sind[1]).

$c_1 + c_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)$ ist dann ein Vektor, der durch Vektoraddition (vgl. S. 153) der Vektoren c_1 und c_2 entsteht.

$c_1 \cdot c_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ ist ein Vektor, dessen Argument φ gleich der Summe derjenigen von c_1 und c_2 ist und dessen Betrag gleich dem Produkt der Beträge von c_1 und c_2 ist.

Zwei komplexe Größen heißen nur dann gleich, wenn sowohl ihre Realteile wie ihre Imaginärteile gleich sind oder sowohl ihre Beträge wie ihre Argumente (modulo 2π).

---

[1]) besonders in der Form: $A \cdot e^{i\omega t} = re^{i(\varphi + \omega t)}$. Bedeutet t die Zeit, so dreht sich der Vektor mit gleichförmiger Geschwindigkeit um den Nullpunkt.

Ist $c_1 = c_2 \cdot C$ oder $\frac{c_1}{c_2} = C = C_0 \cdot e^{i\alpha}$, wo C_0 reell sei, so ist C_0 das Verhältnis der Beträge $\frac{|c_1|}{|c_2|}$ und α der Winkel zwischen den beiden Vektoren: $\alpha = \varphi_1 - \varphi_2$.

$\bar{c} = a - ib$ heißt *„konjugiert komplex"* zu $c = a + ib$.

Daraus folgt:

$$a = \frac{c + \bar{c}}{2} = \Re c$$

$$b = \frac{c - \bar{c}}{2i} = \Im c$$

$$\sqrt{c\bar{c}} = \sqrt{a^2 + b^2} = |c| = |\bar{c}|.$$

2. Analytische Funktionen.

Eine Funktion $f(z) = u + iv$ der komplexen Variablen $z = x + iy$ heißt in einem Bereich *„analytisch"*, wenn sie dort stetig ist und wenn

(1) 1. Definition: $\frac{df(z)}{dz} = \lim\limits_{h,k \to 0} \frac{f(x+h+i(y+k)) - f(x+iy)}{h+ik}$ einen Wert

hat, der von der Art des Grenzüberganges (dem Wege, wie h und k gegen Null gehen) unabhängig ist und der von z stetig abhängt.

(2) 2. Definition: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ ist und diese Differentialquotienten stetige Funktionen von x und y sind.

Die beiden Definitionen sind gleichwertig.

In Punkten, in denen die obigen Forderungen nicht erfüllt sind, heißt die Funktion *„irregulär"* oder *„singulär"*.

Eine analytische Funktion einer analytischen Funktion ist wieder eine solche. Auch die zu $f(z)$ inverse Funktion $\varphi(z)$ (definiert durch $\varphi(fz) = f(\varphi z) = z$) ist eine analytische.

Durch eine analytische Funktion $f(z) = u + iv$ werden u und v als Funktionen von x und y festgelegt:

(3) $$u = f_1(x, y), \quad v = f_2(x, y).$$

Man findet diese, indem man $f(x + iy)$ in die Form $f_1(x, y) + i f_2(x, y)$ bringt.

f_1 und f_2 heißen zueinander „konjugierte" Potential-Funktionen. Es gilt für diese unter Heranziehung der 2. Definition

(4) $$\Delta f_1 = \Delta f_2 = 0, \quad \text{wo} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Jede beliebige analytische Funktion f liefert daher zwei partikuläre Lösungen der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ (im Zweidimensionalen).

Für eine analytische Funktion $f(z) = u + iv$ ist, wenn $f(z)$ für reelles z reell ist,

$$f(\bar{z}) = u - iv$$

und daher

$$u = \frac{f(z) + f(\bar{z})}{2}; \qquad v = \frac{f(z) - f(\bar{z})}{2i}.$$

Durch eine analytische Funktion f wird dem Wertepaar x, y ein solches u, v zugeordnet. Betrachtet man daher x, y als die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes in einer Ebene, u, v als die eines Punktes in einer zweiten Ebene, so vermittelt die Funktion f die *Abbildung* jedes Punktes oder aus Punkten gebildeten Systems (z. B. einer Kurve oder eines Flächenstücks) der x, y-Ebene auf die u, v-Ebene.

$f(z)$ vermittelt eine *konforme*, d. h. *winkeltreue* Abbildung (mit Erhaltung des Drehsinns), d. h. eine solche, bei der unendlich kleine reguläre Gebiete winkeltreu von der x, y-Ebene auf die u, v-Ebene abgebildet werden.

Unter dem Integral $\int_a^b f(z)\,dz$ versteht man:

$$(5) \quad \int_a^b f(z)\,dz = \int_a^b (u + iv)(dx + i\,dy) = \int_a^b (u\,dx - v\,dy) + i\int_a^b (v\,dx + u\,dy).$$

Die Integrale sind längs einer bestimmten Kurve zwischen den Punkten a und b zu erstrecken.

Wegen der Definitionsgleichung (2) der analytischen Funktionen sind sowohl $(u\,dx - v\,dy)$ wie $(v\,dx + u\,dy)$ *totale Differentiale* (vgl. S. 15).

3. Cauchys Integralsatz.

$\int_a^b f(z)\,dz$ bleibt unverändert, wenn man unter Festhalten von a und b den Integrationsweg verschiebt, falls nicht diese Verschiebung über irreguläre Punkte geschieht.

Erfolgt die Integration über eine geschlossene Kurve (Zeichen $\oint$), d. h. ist $a = b$, so ist $\oint f(z)\,dz = 0$, wenn die Kurve keinen irregulären Punkt einschließt.

Integralformel.

$$(6) \qquad f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{f(z)}{z - \zeta}\,dz$$

gestattet die Berechnung von $f(z)$ für den Wert $z = \zeta$, wenn $f(z)$ auf dem Umfang einer den Punkt ζ umschließenden Kurve gegeben ist, welche keinen irregulären Punkt einschließt.

Spezialfall: $\oint (z - \zeta)^n\,dz$ ist $= 0$ außer für $n = -1$,

$$(7) \qquad \oint \frac{dz}{z - \zeta} = 2i\pi.$$

Mittelwertsatz. Ist die Kurve ein Kreis und ist $u_0 + i v_0$ der Wert von $f(z)$ im Mittelpunkt, $u + iv$ der Wert auf dem Umfang (dargestellt als Funktion des Winkels ϑ), so ist

(8) $$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\, d\vartheta; \qquad v_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v\, d\vartheta,$$

also u_0 bzw. v_0 der Mittelwert der u bzw. v auf dem Umfang des Kreises.

4. Potenzreihenentwicklung der analytischen Funktionen.

a) Entwicklung in der Umgebung regulärer Punkte.

Eine analytische Funktion gestattet in der Umgebung eines Punktes $z = z_0$, in dem sie regulär ist, folgende konvergente Entwicklung:

(9) $$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots,$$

wobei

(10) $$a_n = \frac{1}{2i\pi}\oint \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Die Entwicklung konvergiert nur, solange $|z - z_0|$ nicht größer als ein gewisser Wert R ist. R heißt der Radius des „Konvergenzkreises".

Das die a_n bestimmende Integral ist zu erstrecken über eine einfach geschlossene Kurve, die z_0, aber keine singulären Punkte umschließt.

Der Konvergenzkreis um z_0 geht durch den nächsten bei z_0 liegenden irregulären Punkt der Funktion $f(z)$.

Verschwinden die ersten n Koeffizienten der Entwicklung, a_0 bis a_{n-1}, nicht aber a_n, so heißt z_0 eine *„Nullstelle n-ter Ordnung"* der Funktion $f(z)$.

Ist $f(z)$ im Unendlichen regulär $\left(\text{d. h. } f\left(\frac{1}{z}\right) \text{ für } z = 0\right)$, so gestattet $f(z)$ die Entwicklung

(11) $$f(z) = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \cdots,$$

wobei

(12) $$a_{-n} = \frac{1}{2i\pi}\oint f(\zeta)\,\zeta^{n-1}\, d\zeta.$$

Diese konvergiert *außerhalb* eines um den Nullpunkt beschriebenen Kreises, der durch den entferntesten irregulären Punkt läuft.

Das praktisch Wesentliche an diesen Entwicklungsmöglichkeiten ist, daß die Funktion innerhalb des Konvergenzbereiches auch schon durch

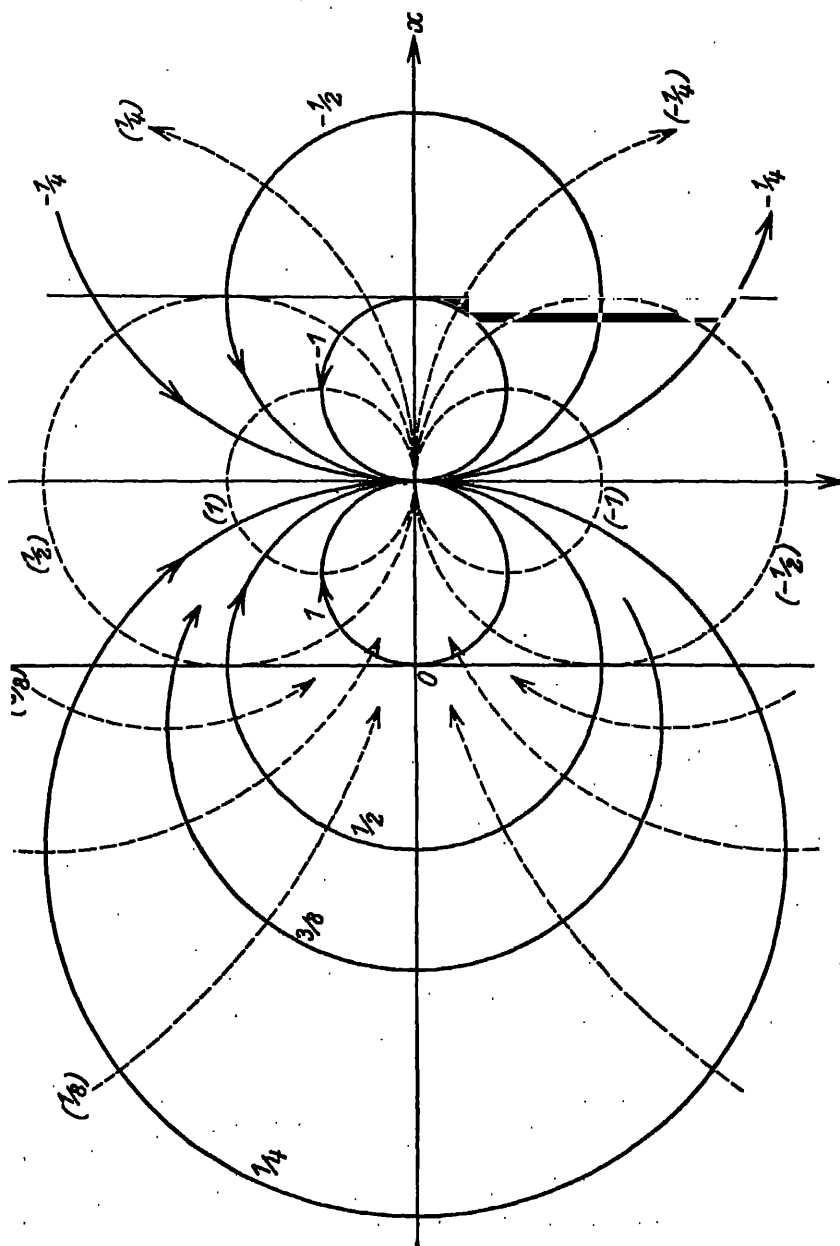


Fig. 2.

eine Reihe von beschränkter Gliederzahl mit einer gewissen Näherung dargestellt wird, die sich dann mit wachsender Gliederzahl bis zu beliebigem Grad verbessert.

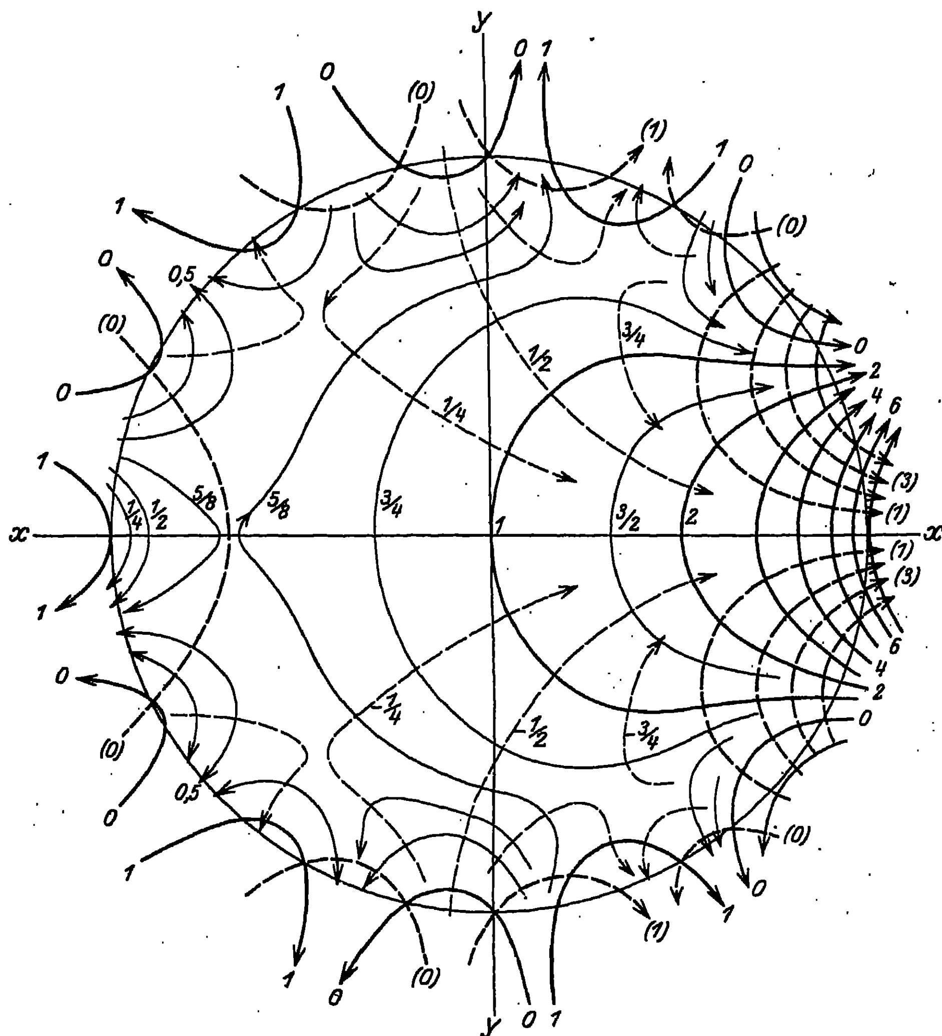


Fig. 3.

Als Beispiel für eine derartige Annäherung ist in Fig. 2 die Funktion $\frac{1}{1-z}$, in Fig. 3 dieselbe, nach steigenden Potenzen bis z^6 entwickelt, dargestellt. Man erkennt, wie außerhalb des Konvergenzkreises mit dem Radius 1 überhaupt keine Annäherung an die gegebene Funktion

stattfindet. In Fig. 4 ist dieselbe Funktion, nach fallenden Potenzen entwickelt, gezeichnet. Hier ist innerhalb des Konvergenzkreises keine Annäherung vorhanden.

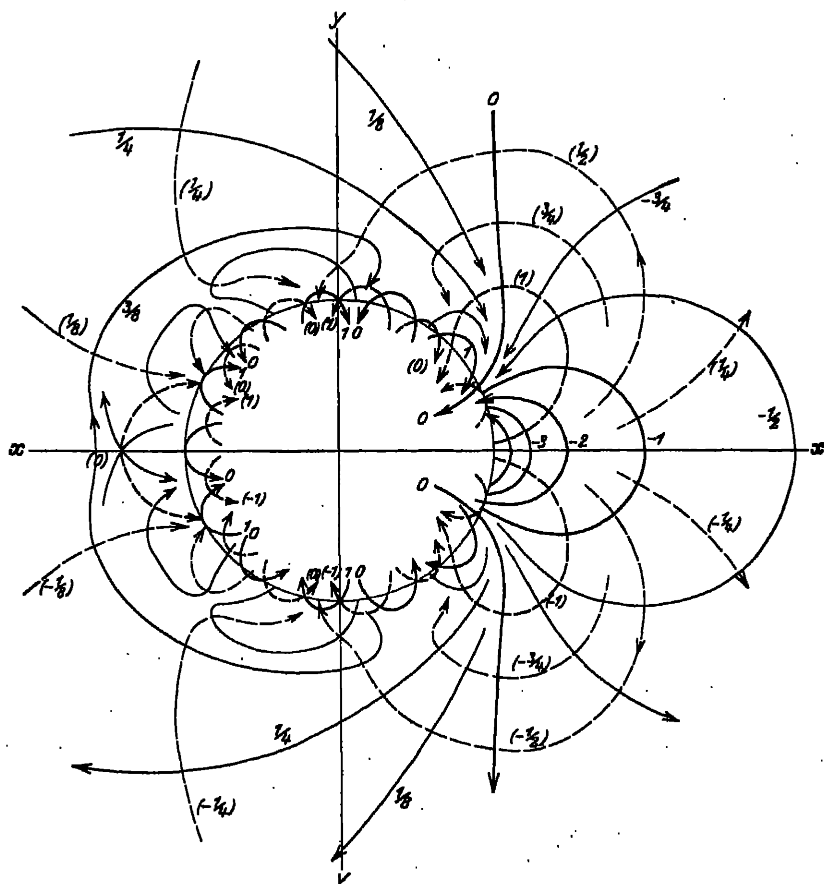


Fig. 4.

Analytische Fortsetzung. Durch die Entwicklung in der Umgebung von z_0 ist $f(z)$ zunächst nur innerhalb des Konvergenzkreises bestimmt. Geht man zu der Entwicklung um einen Punkt $z'_0 = z_0 + c$ über, so erhält man die Entwicklung

$$f(z) = a_0 + a_1 (z - z'_0 + c) + a_2 (z - z'_0 + c)^2 + \dots .$$

Löst man die einzelnen Klammerpotenzen $(z - z'_0 + c)^n$ nach dem binomischen Lehrsatz und ordnet nach Potenzen von $(z - z'_0)$, so erhält man eine Entwicklung der Form

$$f(z) = b_0 + b_1 (z - z'_0) + b_2 (z - z'_0)^2 + \dots .$$

die in einem Kreise um z_0' konvergiert, der möglicherweise über den alten Kreis hinausragt. In dem den beiden Kreisen gemeinsamen Gebiete liefern beide Entwicklungen dieselben Werte. Die zweite Entwicklung heißt, soweit sie außerhalb des Konvergenzkreises des ersten konvergiert, „Fortsetzung" der ersten. Durch Wiederholung dieses Verfahrens ist es möglich, die durch die Potenzreihe definierte Funktion über einen weiteren Bereich, eventuell über die gesamte Ebene fortzusetzen. Es gibt Fälle, in denen eine Fortsetzung über eine bestimmte Grenze nicht möglich ist.

b) Entwicklung in der Umgebung nicht regulärer Punkte.

In der Umgebung eines *„m-fachen Pols"* in $z = z_0$ gestattet die Funktion folgende Entwicklung:

$$(13) \qquad f(z) = a_{-m}(z - z_0)^{-m} + a_{-(m-1)}(z - z_0)^{-m+1} + \dots$$
$$+ a_{-1}(z - z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots .$$

In der Umgebung eines *„Verzweigungspunktes"* in $z = z_0$ gilt folgende Entwicklung:

$$(14) \qquad f(z) = a_0(z - z_0)^{\frac{\alpha}{\nu}} + a_1(z - z_0)^{\frac{\alpha+1}{\nu}} + a_2(z - z_0)^{\frac{\alpha+2}{\nu}} + \dots ,$$

wo ν eine beliebige positive, α eine beliebige positive oder negative ganze Zahl ist.

In der Umgebung eines *„wesentlich singulären"* Punktes in $z = z_0$ ist keine Reihenentwicklung nach steigenden Potenzen von $(z - z_0)$ möglich.

Durch diese Entwicklungsmöglichkeiten ist der Charakter eines irregulären Punktes definiert. Der Charakter der Funktion im ∞ fernen Punkt $(z = \infty)$ wird durch die Entwicklungsmöglichkeiten von $f\left(\frac{1}{z}\right)$ an der Stelle $z = 0$ gekennzeichnet.

Residuum. Der Koeffizient a_{-1} der Potenzreihenentwicklung in der Umgebung eines Poles heißt *„Residuum"* des Poles.

Es gilt

$$(15) \qquad a_{-1} = \frac{1}{2i\pi}\oint f(z)\,dz$$ [1].

Hierbei ist der Integrationsweg eine Kurve, welche keine irreguläre Stelle außer dem Pol einschließt.

Als Residuum des ∞ fernen Punktes bezeichnet man den Koeffizienten $-a_1$ der in der Umgebung dieses Punktes gültigen Entwicklung

[1] Diese Formel ist praktisch von besonderer Bedeutung, weil sie die Berechnung des Integrals $\oint f(z)\,dz$ zurückführt auf die Entwicklung der Funktion in der Umgebung eines Poles.

(16) $f(z) = a_{-m} z^m + a_{-m+1} z^{m-1} + \dots + a_{-1} z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots,$

falls dort die Funktion regulär ist oder nur einen Pol hat.

Residuensatz. Ist $f(z)$ in einem von einer oder mehreren stetigen Kurven berandeten Gebiet überall eindeutig und bis auf endlich viele Pole im Innern regulär, so ist $\frac{1}{2\pi i}\oint f(z)\,dz$ erstreckt über die Berandung des Gebietes gleich der Summe der Residuen der Pole dieses Gebietes. Ist $f(z)$ überall eindeutig und bis auf endlich viele Pole regulär, so ist die Summe der zu den Polen und zum unendlich fernen Punkt gehörigen Residuen gleich Null.

Laurentsche Reihe. Für einen ringförmigen Bereich (zwischen zwei konzentrischen Kreisen K und k um $z = 0$), innerhalb dessen $f(z)$ regulär ist, konvergiert die Reihe

(17) $$f(z) = \dots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

wobei

(18) $$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_K \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}} & (n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots), \\ a_{-n} = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_k z^{n-1} f(z)\,dz & (n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots). \end{cases}$$

5. Berechnung bestimmter Integrale durch Integration im Komplexen.

Gegeben sei ein reelles bestimmtes Integral $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Ist $f(z)$ in einem die Strecke $a \to b$ der reellen Achse enthaltenden Gebiet der komplexen z-Ebene analytisch, so ist $I = \int_a^b f(z)\,dz$ ein in der komplexen Ebene auszuführendes Integral zwischen den Punkten a und b der reellen Achse. Als Integrationsweg kann man dann jeden beliebigen nehmen, der durch Verzerrung des ursprünglichen reellen Weges bei Festhaltung der ursprünglichen reellen Grenzen a und b entsteht, falls die Verzerrung nicht über einen singulären Punkt von $f(z)$ hinübergeführt hat. Es lassen sich häufig komplexe Wege von a nach b finden, längs derer die Integration bequemer, als längs des reellen Weges auszuführen ist.

Um die Verzerrung auch über singuläre Punkte hinwegführen zu können, muß man so verfahren, wie die Figur zeigt: Man ersetzt den reellen Weg $a \to b$ durch drei komplexe Stücke, 1. den verlangten Umweg, 2. einen (beliebig kleinen) Kreis um den singulären Punkt,

3. die Zuwege zu dem singulären Punkt. Der Anteil des Weges 2 ist gleich $2\pi i$ mal dem Residuum des singulären Punktes; der Anteil des Weges 3 (Hin- und Rückweg) verschwindet.

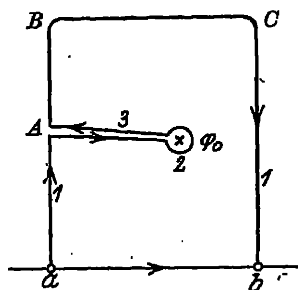


Fig. 5.

Durch Einführung einer neuen geeigneten Variablen $\varphi(z)$ statt z (Abbildung von der z-Ebene auf eine φ-Ebene) kann oft eine weitere Vereinfachung erzielt werden (z. B. so, daß das Integral über den Weg 1 ganz verschwindet, letzteres besonders dann, wenn die neue Variable zu einem geschlossenen Integrationsweg führt). — Gelegentlich kann man den Integrationsweg so legen, daß nur kleine Stücke des Weges wesentliche Beiträge zum Gesamtwert I liefern, und zwar Stücke, wo der Integrand (näherungsweise) in einfacher Form geschrieben werden kann (Methode der Sattelpunkte). Es sind noch andere Kunstgriffe möglich, z. B. das neue Integral als reellen Teil eines einfacheren komplexen Integrals aufzufassen[1]).

Beispiel für komplexe Integration:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi},$$

wo ε reell ist und zwischen 0 und 1 liegt.

Wir fassen $\varphi = \alpha + i\beta$ als komplexe Variable auf. Dann ist der Integrationsweg vom Punkte $\varphi = 0$ zum Punkt 2π der reellen Achse zu erstrecken (Fig. 5). Dieser Weg kann verzerrt werden in den Weg über ABC. Um hierbei nicht über den singulären Punkt φ_0 $\left(\cos\varphi_0 = -\frac{1}{\varepsilon},\ \mathfrak{Cof}\,\beta_0 = \frac{1}{\varepsilon},\ \alpha_0 = \pi\right)$ hinwegzugehen, ist von A aus der Weg zu φ_0, um dieses in einem Kreis herum und längs des Zuweges wieder nach A geführt.

Das Integral verschwindet für die beiden Stücke parallel der imaginären Achse wegen der Periodizität von $\cos\varphi$, ferner für das Stück BC, wenn das Stück unendlich weit hinausgeschoben wird, weil hier der Integrand verschwindet, außerdem für die Zuwege. Es bleibt also nur das Stück um φ_0 herum zu berechnen.

In φ_0 hat der Integrand einen einfachen Pol. Die Entwicklung lautet hier: $\frac{1}{1+\varepsilon\cos\varphi} = \frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0 - \cos\varphi} = \frac{a_{-1}}{\varphi - \varphi_0} + a_0 + a_1(\varphi - \varphi_0) + \cdots$

[1]) Beispiele der Anwendung auch bei physikalischen Untersuchungen vgl. A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, Zusatz 7. Ferner A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 44, 177, 1914. L. Brillouin, Ann. d. Phys. 44, 203, 1914. P. Debye, Math. Ann. 67, 535, 1910.

Um a_{-1}, das Residuum, zu finden, multiplizieren wir mit $\varphi - \varphi_0$ und gehen zur Grenze $\varphi = \varphi_0$ über:

$$a_{-1} = \frac{(\varphi - \varphi_0)\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}\Bigg|_{\lim(\varphi-\varphi_0)=0} = \frac{1}{\sin\varphi_0}\cdot\cos\varphi_0 = -\frac{1}{\varepsilon\sqrt{1-\frac{1}{\varepsilon^2}}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} = -\frac{i}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Das gesuchte Integral ist dann gleich

$$2\pi i a_{-1} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Zum gleichen Resultate kommt man auf folgendem Wege:

Setzt man $z = e^{i\varphi}$, so wird das Integral $= \int \frac{-i\,dz}{z\left[1+\frac{\varepsilon}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]}$. Der Integrationsweg ist ein Kreis mit dem Radius 1 um den Nullpunkt. Singuläre Punkte liegen an den Stellen der Wurzeln z_1 und z_2 der Gleichung $z^2 + \frac{2}{\varepsilon}z + 1 = 0$, wo der Integrand unendlich wird. Von diesen liegt nur $z_1 = -\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - 1}$ im Innern des Integrationsweges. Die Entwicklung lautet hier:

$$\frac{-i}{\frac{\varepsilon}{2}(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{a_{-1}}{z-z_1} + a_0 + a_1(z-z_1) + \ldots,$$

also ist

$$a_{-1} = \frac{-i}{\frac{\varepsilon}{2}(z_1-z_2)} = \frac{-i}{\varepsilon\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-1}} = \frac{-i}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

und das Integral wird

$$2\pi i a_{-1} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

6. Veranschaulichung komplexer Funktionen.

(Vgl. Fig. 2—14.)

Die funktionale Abhängigkeit $w = f(z) = u + iv$ von $z = x + iy$ veranschaulicht man sich geometrisch in folgenden zwei Weisen[1]):

A. Man zeichnet in einem Koordinatensystem u, v die Kurven, die man erhält, wenn man die Geradenscharen $x = a$ und $y = b$

[1]) Die Darstellung A ist die übliche, um den Begriff der konformen Abbildung durch die Funktionen $f(z)$ zu veranschaulichen, andererseits entspricht B der üblichen graphischen Darstellung der Abhängigkeiten $u = f_1(x, y)$, $v = f_2(x, y)$.

punktweise abbildet, d. h. man zeichnet die Kurven $u+iv=f(a+iy)$[1]) bzw. $u+iv=f(x+ib)$, wo a und b Parameter sind, denen man beliebige (praktisch äquidistante) Werte beilegt.

B. Man zeichnet in einem Koordinatensystem x, y die Kurven $u=f_1(x, y)=s$ und $v=f_2(x, y)=t$, wo s und t Parameter (wie oben) sind.

Die funktionale Abhängigkeit von $\varphi(u+iv)=z=x+iy$ der zu f *inversen* Funktion φ $[\varphi(f(z))=z]$ wird durch dieselben Bilder veranschaulicht, nur mit vertauschter Bedeutung.

In beiden Fällen erhält man je zwei einander orthogonal schneidende Kurvenscharen. Aus ihrem Verlauf lassen sich alle charakteristischen Eigenschaften der Funktion $f(z)$ bzw. $\varphi(z)$ erkennen.

Faßt man die Kurven als Höhenlinien (Isohypsen) bzw. als Falllinien (Gradienten) einer Fläche auf, so haben diese Flächen überall, wo die Funktion regulär ist, folgende Eigentümlichkeiten:

1. Die Fläche hat nirgends ein Maximum (Gipfel) oder Minimum (Grube).

2. Jede Gradientenlinie fällt monoton von $+\infty$ bis $-\infty$.

Jede Kurve trennt ein „höheres" von einem „niederen" Gebiet. Wo hiervon eine Ausnahme zu sein scheint, setzen sich die hier zusammenstoßenden Flächenteile nach gegenseitiger Durchdringung weiter fort. Diese Durchdringungslinien endigen jeweils in zwei Punkten (von denen einer auch im Unendlichen liegen kann).

Wo eine Kurve in sich geschlossen zu sein scheint, ist sie tatsächlich entweder durch einen irregulären Punkt in zwei Teile geteilt oder sie setzt sich auf einer höheren oder tieferen Fläche fort ($\ln z$).

Die Flächen haben häufig *Sattelpunkte,* in denen ein Übergang aus einem „Tal" in ein anderes über einen „Paß" erfolgt. In solchen Sattelpunkten schneiden sich (scheinbar) zwei Fallinien bzw. Höhenlinien, also zwei Kurven der gleichen Schar, die dann denselben Parameter haben. In diesen Punkten ist die Forderung der Orthogonalität der beiden Kurvenscharen nicht erfüllt.

Die Kurve eines gegebenen Parameterwertes braucht nicht aus einem einzigen zusammenhängenden Stück zu bestehen.

Diese Merkmale haben die Kurven sowohl der Darstellung A wie B. Dabei ist es gleichgültig, welche der Kurvenscharen man als Höhenlinien und welche man als Fallinien auffaßt.

Eine andere Deutung der Kurven besteht darin, daß man die eine Schar als *Strömungslinien* einer zweidimensionalen Strömung betrachtet, die anderen als die Kurven konstanten Strömungspotentials.

---

[1]) Da eine solche Gleichung, indem man die Realteile bzw. die Imaginärteile gleichsetzt, eigentlich zwei Gleichungen darstellt, kann man y eliminieren und erhält eine Gleichung $F(u, v)=a$.

Seien z. B. die Kurven $v = \text{const}$ die Potentialkurven, so sind:

$$v_x = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{und} \quad v_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

die Komponenten des Strömungsvektors $\mathfrak{v}$ (vgl. Abschnitt „Vektoranalysis"). Wegen $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ und $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ ist $\mathfrak{v}$ parallel zu $u = \text{const}$; ferner wegen $\Delta v = 0$ ist $\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$, und wegen $\mathfrak{v} = \operatorname{grad} v$ wird $\operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0$. Die Strömung ist also wirbel- und quellenfrei.

Die singulären Stellen werden dann Quellen- oder Wirbelpunkte, d. h. Stellen, wo $\operatorname{div} \mathfrak{v} \neq 0$ oder $\operatorname{rot} \mathfrak{v} \neq 0$ ist.

Betrachtet man die Kurven der

Darstellung A,

so kann man über die Lage und Natur der charakteristischen Stellen folgendes aussagen: Die Funktion hat einen *Nullpunkt* für die Werte der Funktion x, y, deren Kurven durch den Nullpunkt $u = v = 0$ verlaufen. Endigen hier die Kurven, d. h. kehren sie hier ihre Richtung um, so haben wir einen zweifachen Nullpunkt. Dann ist die Darstellung nicht in einer u, v-Ebene vollständig, sondern in einem zweiten *„Riemannschen Blatt"* zu ergänzen. Benachbarte Kurven wenden hier scharf um. Geschieht dies um den Winkel $n \cdot \pi$, so liegt ein n-facher Nullpunkt vor. (Beispiel: $\sqrt{z}$).

Hat die Funktion mehrere Nullpunkte, so ist die Darstellung A nur in mehreren Blättern möglich. In jedem sind die Nullpunkte gesondert zu betrachten.

Die Funktion hat *Pole* für die Werte x, y, deren Kurven durch den unendlich fernen Punkt $u = v = \infty$ verlaufen. Man erkennt den Verlauf durch Darstellung der Funktion $f\left(\frac{1}{z}\right)$. Für die mehrfachen Pole gilt hier dasselbe wie oben für die Nullpunkte.

Die Funktion hat *Verzweigungsstellen* für die Werte x, y, deren Kurven durch einen Sattelpunkt laufen. Die Zahl ν der Entwicklung in einem ν-fachen Verzweigungspunkt ist gleich der Zahl der im Sattelpunkt zusammenlaufenden Täler.

Kommt eine Kurve gegebenen Parameterwertes in n getrennten Teilen vor, so ist die Funktion n-deutig.

Bequemer ist die Ablesung der Eigenschaften aus der

Darstellung B.

Nullpunkte sind die Schnittstellen der Kurven $u = 0$, $v = 0$. Ist dies zugleich ein Sattelpunkt mit n Tälern, so haben wir einen n-fachen Nullpunkt.

Einfache Pole haben den Charakter einer „Doppelquelle" (oder einer unendlich hohen Spitze der Fläche mit einem unmittelbar benach-

barten unendlich tiefen „Loch“), n-fache Pole den Charakter eines Quellensystems, das aus n Quellen und n Senken in unendlich enger symmetrischer Anordnung besteht. Aus einem Pol entspringen Kurvenbündel aller Parameterwerte $u = a$, die dann hier rückwärts wieder einmünden. Aus einem n-fachen Pol entspringen n solcher Bündel.

Verzweigungspunkte haben ähnlichen Charakter wie Nullpunkte der Darstellung A, d. h. in ihnen biegen die Kurven scharf um.

Wesentlich singuläre Stellen haben andere Eigentümlichkeiten, z. B. wie Quellpunkte, von denen nach allen Seiten Strömung ausgeht ($\ln z$).

Ist die Darstellung nicht in einer Fläche möglich, so ist die Funktion mehrdeutig, n-deutig wenn dazu n Blätter gehören. In ν-fachen Verzweigungspunkten ist die Funktion im allgemeinen $(n - \nu)$-deutig.

Bei der Darstellung A oder B in mehreren Blättern kann man durch geeignetes Zusammenfügen der aufgeschnittenen Flächen diese zu einem zusammenhängenden Gebilde (*Riemannsche Fläche*) vereinigen. Die Lage der Schnitte ist hierbei willkürlich, doch müssen diese in den Verzweigungspunkten endigen.

Eine andere Art der geometrischen Darstellung besteht in der Abbildung von geschlossenen Kurven (z. B. Kreisen) von der x, y-Ebene auf die u, v-Ebene. Diese erscheinen abgebildet wieder als geschlossene Kurven. Umschlingt eine solche Kurve einen Verzweigungspunkt einfach in der x, y-Ebene, so umschlingt sie den Bildpunkt mehrfach in der u, v-Ebene, ehe sie in sich zurückkehrt. Die Zahl der Umschlingungen gibt dann die Zahl der Blätter der Riemannschen Fläche an.

Um eine Funktion auch für $z = \infty$ zu veranschaulichen, ist es möglich, die x, y- bzw. u, v-Ebene auf eine Kugel zu projizieren, die die Ebene in einem Punkte, z. B. dem Nullpunkt berührt. Von dem dem Berührungspunkt diametralen Punkt auf der Kugel zieht man Strahlen, deren Schnittpunkte mit der Ebene und der Kugel dann eine eindeutige Zuordnung aller Punkte der Ebene zu denen der Kugel liefern (stereographische Projektion). Auch der Punkt $z = \infty$ ist dann auf die Kugel projiziert. Von der Kugel kann man sodann ebenso alle Punkte auf eine zweite die Kugel berührende Ebene projizieren. Die beiden Projektionen liefern je eine winkeltreue Abbildung. Die Abbildung der ersten Ebene auf die zweite, ist auch durch eine gebrochene lineare Funktion zu erreichen. Der unendlich ferne Punkt wird hierbei im Endlichen projiziert.

B. Spezielle Funktionen.

1. Klassifikation der Funktionen.

$w = az + b$ heißt *ganze lineare* Funktion.

$w = \frac{az+b}{cz+d}$ heißt *gebrochene lineare* Funktion.

$w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ heißt *ganze rationale* unktion.

$w = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}$ heißt *gebrochene rationale* ınktion.

Ist w Wurzel einer algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten ınze rationale Funktionen sind, so heißt w eine *algebraische* ınktion.

Eine nicht algebraische Funktion heißt eine *transzendente.*

$w = \sum_0^\infty a_n z^n$ heißt *ganze* transzendente Funktion, wenn die un- ıdliche Potenzreihe für jeden endlichen Wert von z konvergiert.

2. Rationale Funktionen

ıd ihre Umkehrung. Die Umkehrungen sind im allgemeinen nicht tional.

1. Lineare ganze Funktionen

$$w = f(z) = az + b, \quad \text{Umkehrung: } z = \varphi(w) = \frac{w-b}{a}.$$

Veranschaulichung: Jede Gerade in der x, y-Ebene bildet sich als erade in der u, v-Ebene ab und umgekehrt. Durch Einführung neuer ›ordinaten u, v mit Hilfe einer linearen Transformation (d. i. geome- sch eine Verschiebung, Drehung und Maßstabänderung) läßt sich le lineare Funktion auf die Form bringen:

$$w = z, \quad \text{Umkehrung: } z = w,$$

i welcher die x, y- und die u, v-Ebene identisch werden.

2. Ganze rationale Funktionen 2. Grades

$$w = f(z) = az^2 + bz + c$$

ısen sich durch lineare Transformation (wie oben) auf die Form duzieren:

$$w = f(z) = z^2, \quad \text{Umkehrung: } z = \varphi(w) = \sqrt{w}.$$

$+z$ und $-z$ gehören zu ein und demselben Wert w. Daher rd die Hälfte der x, y-Ebene (z. B. die Halbebene $y > 0$) auf die

ganze u, v-Ebene abgebildet. Die Kurven

$$x = \text{const}, \quad y = \text{const} \qquad \text{bzw.} \qquad u = \text{const}, \quad v = \text{const}$$

haben in der

$$u, v\text{-Ebene} \qquad \text{bzw.} \qquad x, y\text{-Ebene}$$

die Gleichungen

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} +u + \sqrt{u^2 + v^2} = 2x^2 \\ -u + \sqrt{u^2 + v^2} = 2y^2 \end{cases}$$

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 = u \\ 2xy = v. \end{cases}$$

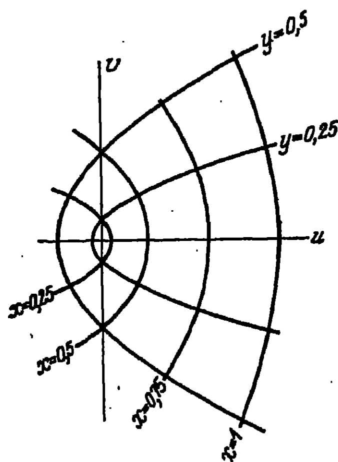


Fig. 6.

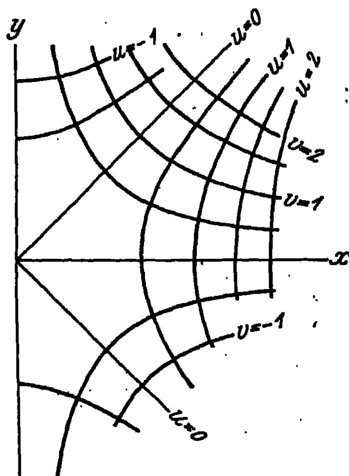


Fig. 7.

(A) gibt eine Schar von konfokalen Parabeln mit 0 als Brennpunkt (Fig. 6).

(B) gibt eine Schar von gleichseitigen Hyperbeln in der Halbebene $y > 0$ (Fig. 7).

Statt der Abbildung (A) und (B) von rechtwinklig gekreuzten Geradenscharen ist oft nützlich eine Abbildung rechtwinklig gekreuzter Kreisscharen und Radienvektoren:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \qquad \text{bzw.} \qquad \varrho = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \psi = \operatorname{arctg} \frac{v}{u}.$$

Das obige Beispiel $w = z^2$, $z = \sqrt{w}$ geht in diesen Polarkoordinaten dadurch über in

$$\varrho\, e^{i\psi} = r^2 e^{2i\varphi}, \qquad \text{Umkehrung: } r\, e^{i\varphi} = \varrho^{\frac{1}{2}} e^{i\psi/2},$$

also

$$\varrho = r^2, \quad \psi = 2\varphi, \qquad \text{„} \qquad r = \sqrt{\varrho}, \quad \varphi = \psi/2.$$

Es entsprechen also Kreise um den Nullpunkt und Radien in der ganzen u, v-Ebene den Kreisen und Radien in der Hälfte der x, y-Ebene.

3. Ganze rationale Funktion n-ten Grades. Als Beispiel nehmen wir

$$w = f(z) = z^n, \qquad \text{Umkehrung: } z = \varphi(w) = \sqrt[n]{w}.$$

Die Abbildung der x, y-Ebene auf die u, v-Ebene wird auch hier sonders einfach in Polarkoordinaten

$$\varrho\, e^{i\psi} = r^n e^{in\varphi}, \qquad r\, e^{i\varphi} = \varrho^{1/n} e^{i\psi/n},$$

$$\varrho = r^n, \quad \psi = n\varphi, \qquad r = \sqrt[n]{\varrho}, \quad \varphi = \psi/n.$$

Kreise um den Nullpunkt und Radien in der ganzen u, v-Ebene entsprechen den Kreisen und Radien im n-ten Teil der x, y-Ebene.

4. Von den gebrochenen rationalen Funktionen betrachten wir den Fall

$$w = f(z) = \frac{1}{z^2}, \qquad \text{Umkehrung: } z = \varphi(w) = \frac{1}{\sqrt{w}}.$$

Die Kurven $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, bzw. $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{u^2 + v^2}\left(+u + \sqrt{u^2 + v^2}\right) = 2x^2 \\[2ex] \dfrac{1}{u^2 + v^2}\left(-u + \sqrt{u^2 + v^2}\right) = 2y^2 \end{cases}$$

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = u \\[2ex] \dfrac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = v \end{cases}$$

und geben folgendes Kurvenbild in der u, v-Ebene bzw. x, y-Ebene.

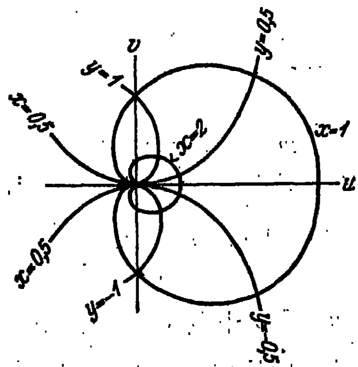


Fig. 8.

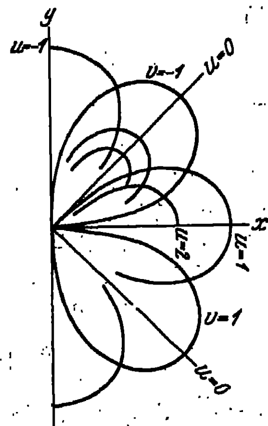


Fig. 9.

3. Nicht rationale algebraische Funktionen.

Als Beispiel führen wir an:

$$w = f(z) = \sqrt{1 - z^2}; \qquad z = \varphi(w) = \sqrt{1 - w^2}.$$

(A) $$\begin{cases} u^2 v^2 + x^2 (v^2 - u^2) = x^4 - x^2 \\ u^2 v^2 - y^2 (v^2 - u^2) = y^4 - y^2 \end{cases}$$

(B) $$\begin{cases} x^2 y^2 + u^2 (y^2 - x^2) = u^4 - u^2 \\ x^2 y^2 - v^2 (y^2 - x^2) = v^4 - v^2. \end{cases}$$

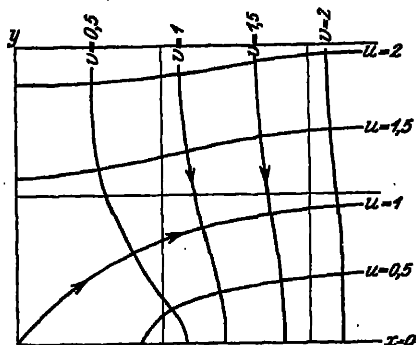


Fig. 10.

4. Transzendente Funktionen.

1. Exponentialfunktion und Logarithmus:

$$w = f(z) = e^z = \lim_{\alpha = \infty} \left(1 + \frac{z}{\alpha}\right)^\alpha, \quad \text{Umkehrung: } z = \varphi(w) = \ln w.$$

(A) $$\begin{cases} \ln \sqrt{u^2 + v^2} = x \\ \operatorname{arctg} \dfrac{v}{u} = y \end{cases}$$

(B) $$\begin{cases} e^x \cos y = u \\ e^x \sin y = v. \end{cases}$$

Bei Vermehrung von z um $\pm 2 i \pi$ behält $w = e^z$ seinen Wert bei. Daher wird bereits ein Streifen der Breite $y_1 - y_2 = 2\pi$ der x, y-Ebene auf die ganze u, v-Ebene abgebildet.

(A) System von Kreisen $r = \text{const}$ und Radien $\varphi = \text{const}$ in der ganzen u, v-Ebene:

$$r = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{u}, \quad z = \lg r + i \varphi.$$

(B) System von Kurven in den Periodenstreifen $-\pi < y < +\pi$:

$$w = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Durch Kombination zweier Exponentialfunktionen kommt man zu den

2. trigonometrischen Funktionen:

$$w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \text{ und } \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}; \qquad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

sowie ihren Umkehrungen $\operatorname{arc}\cos z$, $\operatorname{arc}\sin z$, usw.

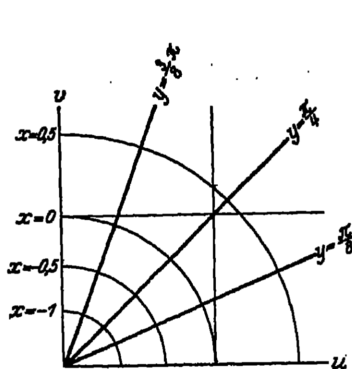


Fig. 11.

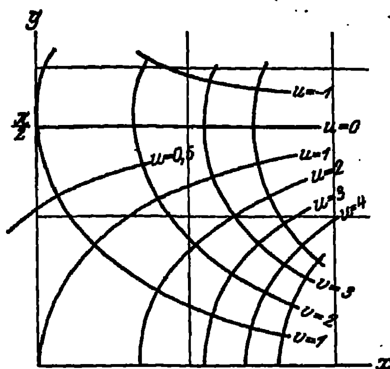


Fig. 12.

Von diesen betrachten wir:

$$w = \sin z, \qquad \text{Umkehrung: } z = \operatorname{arc}\sin w.$$

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \dfrac{u^2}{\sin^2 x} - \dfrac{v^2}{\cos^2 x} = 1 \\[2ex] \dfrac{u^2}{\mathfrak{Cos}^2 y} + \dfrac{v^2}{\mathfrak{Sin}^2 y} = 1. \end{cases}$$

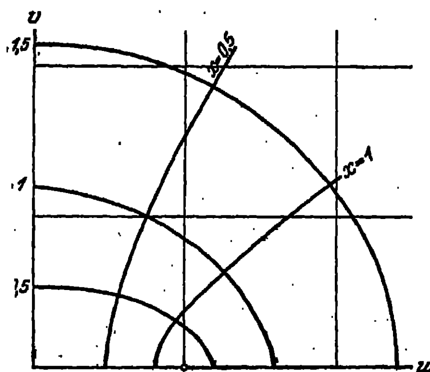


Fig. 13.

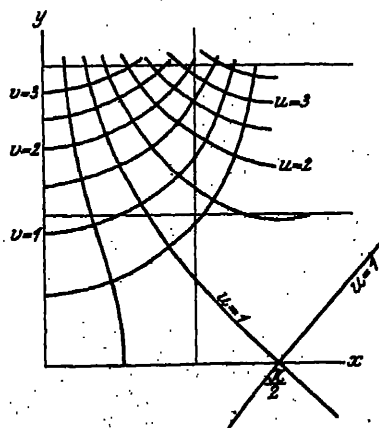


Fig. 14.

System von Ellipsen und Hyperbeln in der ganzen u, v-Ebene.

$$\text{(B)}\qquad \begin{cases} \sin x \,\mathfrak{Cof}\, y = u \\ \cos x \,\mathfrak{Sin}\, y = v. \end{cases}$$

System von Kurven in dem Periodenstreifen $n\pi < x < (n+1)\pi$.

Wichtige Formeln:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{cotg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y \mp 1}{\operatorname{cotg} x \pm \operatorname{cotg} y}$$

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}, \quad \cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

$$\operatorname{cotg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{1+\cos x}{\sin x} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos y$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin 3x = \sin x (4 \cos^2 x - 1)$$

$$\cos 3x = \cos x (1 - 4 \sin^2 x)$$

$$\sin nx = n \sin x \cos^{n-1} x - \binom{n}{3} \sin^3 x \cos^{n-3} x + \binom{n}{5} \sin^5 x \cos^{n-5} x - \ldots$$

$$\cos nx = \cos^n x - \binom{n}{2} \sin^2 x \cos^{n-2} x + \binom{n}{4} \sin^4 x \cos^{n-4} x - \ldots$$

$$\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},$$

$$\operatorname{cotg} 2x = \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2 \operatorname{cotg} x}$$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{cotg} 3x = \frac{\operatorname{cotg}^3 x - 3 \operatorname{cotg} x}{3 \operatorname{cotg}^2 x - 1}$$

wenn n ungerade:

$$\sin^n x = \left(\frac{1}{2i}\right)^{n-1} \left[\sin nx - \binom{n}{1} \sin(n-2)x + \binom{n}{2} \sin(n-4)x - \binom{n}{3} \sin(n-6)x + \ldots (-1)^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \sin x\right]$$

$$\cos^n x = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left[\cos nx + \binom{n}{1} \cos(n-2)x + \binom{n}{2} \cos(n-4)x + \ldots + \binom{n}{\frac{n+1}{2}} \cos x\right]$$

enn n gerade:

$$\text{ı}^n x = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}}\left[\cos n x - \binom{n}{1}\cos(n-2)x + \binom{n}{2}\cos(n-4)x - \ldots \right.$$
$$\left. + (-1)^{\frac{n-2}{2}}\binom{n}{\frac{n-2}{2}}\cos 2x\right] + \binom{n}{\frac{n}{2}}\frac{1}{2^n}$$

$$\text{s}^n x = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left[\cos n x + \binom{n}{1}\cos(n-2)x + \binom{n}{2}\cos(n-4)x + \ldots \right.$$
$$\left. + \binom{n}{\frac{n-2}{2}}\cos 2x\right] + \binom{n}{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

3. Hyperbolische Funktionen:

$$w = \mathfrak{Cof}\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Sin}\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \mathfrak{Cof}^2 z - \mathfrak{Sin}^2 z = 1$$

$$\mathfrak{Tg}\, z = \frac{\mathfrak{Sin}\, z}{\mathfrak{Cof}\, z}; \qquad \mathfrak{Cotg}\, z = \frac{\mathfrak{Cof}\, z}{\mathfrak{Sin}\, z}$$

Die Funktion $\mathfrak{Sin}\, z$ wird durch das um 90^0 gedrehte Bild für z dargestellt.

4. Zusammenhang zwischen verschiedenen transzendenten nktionen.

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

$$a^{ix} = e^{ix\ln a} = \cos(x \ln a) + i \sin(x \ln a).$$

$$e^{2n\pi i} = 1, \quad e^{(2n+1)\pi i} = -1. \qquad (n \text{ ganzzahlig!})$$

$$a + ib = \varrho e^{i\varphi}, \quad \text{wo } \varrho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a},$$

$$a = \varrho \cos\varphi, \qquad b = \varrho \sin\varphi.$$

$$+ ib)^n = \varrho^n e^{in\varphi} = \varrho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

$$x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \mathfrak{Sin}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \sin ix = i\,\mathfrak{Sin}\, x, \quad \mathfrak{Sin}\, ix = i \sin x.$$

$$x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \mathfrak{Cof}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \cos ix = \mathfrak{Cof}\, x, \quad \mathfrak{Cof}\, ix = \cos x.$$

$$x = \frac{1}{i}\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}, \quad \mathfrak{Tg}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{tg} ix = i\,\mathfrak{Tg}\, x, \quad \mathfrak{Tg}\, ix = i \operatorname{tg} x.$$

$$\text{rc} \sin x = -i \ln\left(ix + \sqrt{1 - x^2}\right); \qquad \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, x = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right);$$

$$\sin(ix) = i\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Sin}\, x, \qquad \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, ix = i \arcsin x;$$

$$\text{c} \cos x = -i \ln\left(x + i\sqrt{1 - x^2}\right); \qquad \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right);$$

$$\text{:os}(ix) = i\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Cof}(ix), \qquad \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}(ix) = -i \arccos(ix).$$

$$\text{ırc} \operatorname{tg} x = -\frac{i}{2}\ln\left(\frac{i - x}{i + x}\right), \qquad \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\, x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right);$$

$$\operatorname{tg}(ix) = i\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tg}(x), \qquad \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}(ix) = i \operatorname{arc\,tg} x.$$

$$\ln(ix) = \ln(x) + \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i \qquad \ln(x+iy) = \ln\sqrt{x^2+y^2} + \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + 2n\pi\right)i.$$

$$\ln(-x) = \ln(x) + (2n+1)\pi i$$

$$x^i = \cos(\ln x) + i\sin(\ln x)$$

$$i^x = \cos\left(\frac{x\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{x\pi}{2}\right) \qquad \sqrt{i} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i).$$

$$(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^x = \cos x(\varphi + 2n\pi) \pm i\sin x(\varphi + 2n\pi) = e^{\pm i\varphi x}.$$

5. Berechnung einiger transzendenter Funktionen durch unendliche Reihen.

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots \qquad (|z| < \infty)$$

$$\ln(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - + \dots \qquad (|z| \leqq 1,\ z \neq -1)$$

$$\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2\left[z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots\right] \qquad (|z| \leqq 1,\ z \neq \pm 1)$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \dots \qquad (|z| < \infty)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \dots \qquad (|z| < \infty)$$

$$\arcsin z = z + \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{z^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{z^7}{7} + \dots \qquad (|z| \leqq 1)$$

$$\operatorname{arc\,tg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - + \dots \qquad (|z| \leqq 1,\ z \neq \pm i)$$

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{B_1 z^2}{2!} - \frac{B_2 z^4}{4!} + \dots \qquad (|z| < 2\pi)$$

wo die B_n die Bernoullischen Zahlen bedeuten:

$$B_n = \frac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\left(1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \dots\right), \text{ d. h.}$$

$$B_1 = \frac{1}{6};\ B_2 = \frac{1}{30};\ B_3 = \frac{1}{42};\ B_4 = \frac{1}{30};\ B_5 = \frac{5}{66} \text{ usw.}$$

5. Kugelfunktionen[1].

a) *Legendresche* oder „einfache“ Kugelfunktionen.

Allgemeine Definitionen.

Diese Kugelfunktionen sind ganze rationale Funktionen einer Variablen μ und eines ganzzahligen positiven[2] Parameters n. Sie werden bezeichnet mit $P_n(\mu)$. n heißt die Ordnung der Kugelfunktion. Man

[1] Wegen numerischer Tabellen und weiterer Formeln vgl. z. B. Jahnke und Emde: Funktionentafeln S. 79.

[2] Für negativ s. S. 59.

kann eine Kugelfunktion auch betrachten als Funktion eines Winkels ϑ, indem $\mu = \cos\vartheta$ gesetzt wird.

Die Kugelfunktionen sind auf folgende verschiedene Weisen definiert:

1. $P_n(\cos\vartheta)$ sind die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung:

(1) $$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\vartheta+r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cdot P_n(\cos\vartheta) \quad \text{für } |r| < 1$$

bzw.

(1a) $$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos\vartheta) \quad \text{für } |r| > 1.$$

2. Setzt man $\mu = \cos\vartheta = \frac{z}{r}$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, so ist

(2) $$P_n(\cos\vartheta) = \frac{(-1)^n}{n!} r^{n+1} \cdot \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{r}\right).$$

3. Bildet man eine homogene Funktion n-ten Grades von r und $z = r\cos\vartheta$, die der Bedingung $\Delta H_n(r, z) = 0$ genügt, so ist

(3) $$P_n(\cos\vartheta) = \frac{C}{r^n} \cdot H_n(r, z)$$ [1]

bis auf eine willkürliche Konstante C definiert.

(4) 4. $$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n[(\mu^2-1)^n]}{d\mu^n}.$$

(5) 5. $$P_n(\mu) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\mu \pm \cos\varphi\sqrt{\mu^2-1})^n\, d\varphi.$$

(6) 6. $$P_n(\mu) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(\mu \pm \cos\varphi\sqrt{\mu^2-1})^{n+1}}.$$

Bei 5. und 6. ist + oder — beliebig!

7. $P_n(\cos\vartheta)$ ist ein Spezialfall der allgemeinen Kugelfunktionen $Y_n(\varphi, \vartheta)$, (s. S. 59).

Transformiert man $\Delta V = 0$ auf Polarkoordinaten r, φ, ϑ (vgl. S. 86), setzt die Reihe $V = \sum_n r^n Y_n(\varphi, \vartheta)$ ein und sucht speziell solche Lösungen Y_n, welche von φ unabhängig sind und nur von $x = \cos\vartheta$ abhängen, so gelangt man zu der

8. **Differentialgleichung**

(7) $$n(n+1)y + \frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

---

[1] Auch $H_n' = \frac{1}{r^{n+1}} \cdot P_n(\cos\vartheta)$ erfüllt die Gleichung $\Delta H_n' = 0$.

oder $$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0$$

(*Legendresche* Differentialgleichung).

Ihre allgemeine Lösung lautet:

(8) $$y=A P_n(x)+B Q_n(x),$$

wo A und B willkürliche Konstanten sind und $x=\mu=\cos\vartheta$ geschrieben ist.

9. $$P_n(\mu)=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{n!}$$

(9) $$\left[\mu^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4\cdot(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-4}+\ldots\right].$$

Die Definitionen 1, 2, 4, 5, 6, 9 sind eindeutig, 3 und 8 lassen eine Konstante unbestimmt. 8 gestattet noch eine zweite Lösung, die *Kugelfunktion* 2. *Art* $Q_n(\mu)$.

Es ist üblich, die Konstanten so zu wählen, daß $P_n(1)=1$ wird.

Rekursionsformel:

(10) $$(n+1)P_{n+1}=(2n+1)\mu P_n-nP_{n-1}$$

oder: $$P_{n+1}=\mu P_n+\frac{n}{n+1}(\mu P_n-P_{n-1}).$$

Differentialformel:

Schreiben wir $\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}=P_n'$, so gilt

(11) $$P_n'=\frac{n(\mu P_n-P_{n-1})}{\mu^2-1}=(n+1)\frac{(P_{n+1}-\mu P_n)}{\mu^2-1}.$$

$$P_{n+1}'-P_{n-1}'=(2n+1)P_n$$

$$\mu P_n'-P_{n-1}'=nP_n.$$

Spezielle Formeln:

$P_0(\mu)=1$

$P_1(\mu)=\cos\vartheta=\mu$

$P_2(\mu)=\frac{1}{4}(3\cos2\vartheta+1)=\frac{1}{2}(3\mu^2-1)$

$P_3(\mu)=\frac{1}{8}(5\cos3\vartheta+3\cos\vartheta)=\frac{1}{2}(5\mu^3-3\mu)$

$P_4(\mu)=\frac{1}{64}(35\cos4\vartheta+20\cos2\vartheta+9)=\frac{1}{8}(35\mu^4-30\mu^2+3)$

$P_5(\mu)=\frac{1}{128}(63\cos5\vartheta+35\cos3\vartheta+30\cos\vartheta)$

$\quad=\frac{1}{8}(63\mu^5-70\mu^3+15\mu)$

$$P_6(\mu) = \frac{1}{512}(231 \cos 6\vartheta + 126 \cos 4\vartheta + 105 \cos 2\vartheta + 50)$$
$$= \frac{1}{16}(231\mu^6 - 315\mu^4 + 105\mu^2 - 5)$$
$$P_7(\mu) = \frac{1}{1024}(429 \cos 7\vartheta + 231 \cos 5\vartheta + 189 \cos 3\vartheta + 175 \cos\vartheta)$$
$$= \frac{1}{16}(429\mu^7 - 693\mu^5 + 315\mu^3 - 35\mu)$$
$$P_8(\mu) = \frac{1}{16384}(6435 \cos 8\vartheta + 3432 \cos 6\vartheta + 2772 \cos 4\vartheta + 2520 \cos 2\vartheta + 1225)$$
$$= \frac{1}{128}(6435\mu^8 - 12012\mu^6 + 6930\mu^4 - 1260\mu^2 + 35).$$

Spezielle Werte:

$$P_n(1) = 1$$
$$P_{2n+1}(0) = 0$$
$$P_{2n}(0) = (-1)^n \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}.$$

Negatives Argument:

$$P_{2n}(-\mu) = P_{2n}(\mu)$$
$$P_{2n+1}(-\mu) = -P_{2n+1}(\mu).$$

Allgemeiner Verlauf der Kugelfunktionen im Bereich $1 > \mu > -1$:

Die *Legendreschen* Kugelfunktionen sind oszillierend und ihr Betrag (außer für $\mu = \pm 1$) kleiner als 1.

$P_n(\mu)$ hat n reelle, voneinander verschiedene Nullpunkte zwischen -1 und $+1$.

Für gerade n sind die $P_n(\mu)$ gerade, für ungerade n ungerade Funktionen von μ (Fig. 15).

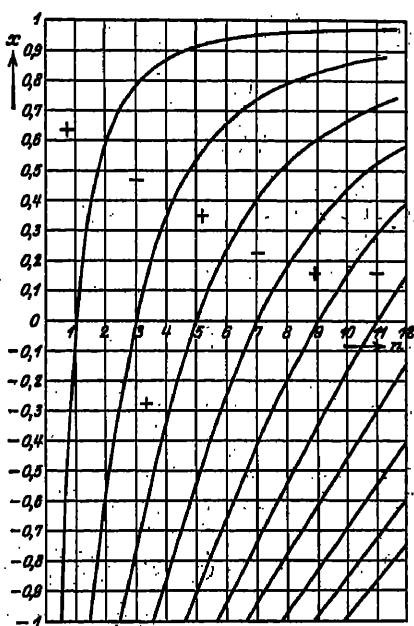


Fig. 15. Kurven: $P_n(x) = 0$.

Integralsätze für Kugelfunktionen:

Es ist *(Orthogonalität der Kugelfunktionen)*

(12) $$\int_{-1}^{+1} P_m(\mu)\cdot P_n(\mu)\,d\mu = 0 \quad \text{für } m \neq n \qquad \int_{-1}^{+1} P_n^2(\mu)\,d\mu = \frac{2}{2n+1}.$$

Asymptotische Darstellung für große Werte von n:

(13) $$P_n(\cos\vartheta) \sim \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\vartheta}} \cdot \sin\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta + \frac{\pi}{4}\right\}^{1)}.$$

Diese Formel gilt nicht mehr für die Umgebung von $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$.

b) Kugelfunktionen zweiter Art $Q_n(\mu) = Q_n(\cos\vartheta)$.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (Legendresche Diff.-Gl., vgl. S. 120)

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$$

lautet: $y = AP_n(x) + BQ_n(x)$.

Setzt man $y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots$, so fordert obige Gleichung die folgende Relation zwischen den A_i

(14) $$A_{i+2} = \frac{(i-n)(n+i+1)}{(i+1)(i+2)} A_i.$$

Es bleiben also zwei A_i, z. B. A_0 und A_1 unbestimmt.

Es wird:

(15) $$y = A_0\left(1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 - \frac{n(2-n)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \ldots\right)$$
$$+ A_1 x\left(1 + \frac{(1-n)(n+2)}{3!}x^2 + \frac{(1-n)(3-n)(n+2)(n+4)}{5!}x^4 + \ldots\right)$$
$$= A_0 p_n(x) + A_1 q_n(x).$$

Für geradzahliges n ist dann das endliche Polynom p_n, für ungerades n das endliche Polynom q_n (bis auf einen Faktor) identisch mit den Legendreschen Kugelfunktionen P_n. Dieser Faktor ist durch die übliche Normierung $P_n(1) = 1$ bestimmt, so daß

(16) $$P_n = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1\cdot 3\ldots n-1}{2\cdot 4\ldots n} p_n \quad \text{für gerade } n,$$

(16a) $$P_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1\cdot 3\ldots n}{2\cdot 4\ldots n-1} q_n \quad \text{für ungerade } n$$

wird. Für gerades n heißen dann die q_n, für ungerades n die p_n Kugelfunktionen 2. Art Q_n. Die Normierung kann analog erfolgen:

(17) $$Q_n = (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{2\cdot 4\ldots n}{1\cdot 3\ldots n-1} q_n \quad \text{für gerade } n,$$

(17a) $$Q_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{2\cdot 4\ldots n-1}{1\cdot 3\ldots n} p_n \quad \text{für ungerade } n.$$

Gelegentlich werden auch andere Normierungen benutzt.

---

1) $f(x) \sim g(x)$ bedeutet $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Nach dieser Definition bricht die Reihe für $P_n(x)$ mit dem n-ten Gliede ab. $Q_n(x)$ ist durch eine unendliche Reihe dargestellt.

Hieraus ist $P_n(x)$ auch für $x > 1$ definiert, während dann die Reihe $Q_n(x)$ divergent wird. Hier konvergiert die Entwicklung:

$$(18)\quad Q_n(x) = \frac{n!}{1\cdot 3\ldots(2n+1)\,x}\left(\frac{1}{x^{n+1}} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}\,\frac{1}{x^{n+3}} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot 4\cdot(2n+3)(2n+5)}\,\frac{1}{x^{n+5}} + \ldots\right).$$

Es ist für $x^2 < 1$

$$(19)\quad Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

$$(20)\quad Q_1(x) = -1 + \frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Es ist für $x^2 > 1$

$$(19a)\quad Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right),$$

$$(20a)\quad Q_1(x) = 1 - \frac{x}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

Weitere Q_n folgen aus der Rekursionsformel:

$$(21)\quad (n+1)\,Q_{n+1} = (2n+1)\,x\,Q_n - n\,Q_{n-1}.$$

Spezielle Werte.

$$Q_n(1) = \infty,$$
$$Q_n(0) = 0 \text{ für gerades } n,$$
$$Q_n(\infty) = 0,$$
$$Q_n(-1) = -\infty.$$

Negativer Parameter n.

Wegen $p_{-n} = p_{n+1}$; $q_{-n} = q_{n-1}$ folgt:

$$(22)\quad P_{-(n+1)} = Q_n.$$

Die Kugelfunktionen 2. Art können daher auch als solche 1. Art mit negativem Parameter n aufgefaßt werden.

c) Allgemeine Kugelfunktionen.

Die allgemeinen Kugelfunktionen sind Funktionen zweier Variablen φ und ϑ (Polarkoordinaten) und eines Parameters n. Außerdem enthalten sie $2n+1$ willkürliche Konstanten. Sie werden bezeichnet mit $Y_n(\varphi, \vartheta)$.

Die allgemeinen Kugelfunktionen sind auf folgende Weisen zu definieren:

1. Man setzt

$$\cos\vartheta = \frac{z}{r};\quad \cos\varphi\sin\vartheta = \frac{x}{r},\quad \sin\varphi\sin\vartheta = \frac{y}{r},\quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Dann ist

$$(23)\qquad Y_n(\varphi,\vartheta) = r^{n+1}\,\frac{\partial^n\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial z^\gamma}.$$

Hierbei ist $\alpha+\beta+\gamma=n$. Durch verschiedene Wahl der α, β, γ sind $2n+1$ verschiedene Funktionen Y_n, die voneinander linear unabhängig sind, definiert.

2. Bildet man eine homogene Funktion n-ten Grades von x, y, z, $H_n(x, y, z)$, die die Bedingung

$$\Delta H_n = 0$$

erfüllt, so ist

$$Y_n(\varphi,\vartheta) = \frac{1}{r^n} H_n(x, y, z)$$

bis auf $2n+1$ Konstanten definiert[1]).

3. Es ist

$$(24)\quad Y_n(\varphi,\vartheta) = \sum_{m=0}^{n} (A_m\cos m\varphi + B_m\sin m\varphi)\sin^m\vartheta\,\frac{d^m P_n(\cos\vartheta)}{d(\cos\vartheta)^m}.$$

Die Ausdrücke

$$(25)\qquad \sin^m\vartheta\,\frac{d^m P_n(\cos\vartheta)}{d(\cos\vartheta)^m} = P_n^m(\cos\vartheta)\ ^{2)}$$

heißen „zugeordnete Funktionen", sodaß man auch schreiben kann:

$$Y_n(\varphi,\vartheta) = \sum_{m=0}^{n} (A_m\cos m\varphi + B_m\sin m\varphi)\,P_n^m(\cos\vartheta).$$

Die A_m und B_m sind $2n+1$ willkürliche Konstanten. Die Funktionen $\cos m\varphi\,P_n^m(\cos\vartheta)$ und $\sin m\varphi\,P_n^m(\cos\vartheta)$ heißen *„symmetrische Kugelfunktionen"*.

4. Die $Y_n(\varphi,\vartheta)$ sind Lösungen der Differentialgleichung:

$$(26)\qquad n(n+1)Y_n + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial Y_n}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Ist $\frac{\partial Y_n}{\partial\varphi} = 0$, so wird $Y_n = C\cdot P_n(\cos\vartheta)$.

---

1) Außer $r^n Y_n$ erfüllt auch $\frac{Y_n}{r^{n+1}}$ die Differentialgleichung $\Delta H_n = 0$.

2) Manche Autoren führen noch einen Faktor, z. B. $\frac{n!}{(n+m)!}$ ein.

Bedeutung von Y_n:

Aus 1. folgt, daß $Y_n(\varphi, \vartheta)$ das Potential auf der Kugel $r = 1$ darstellt, wenn im Zentrum $r = 0$ ein System von Dipolen liegt. Die *Legendreschen* Kugelfunktionen erhält man, wenn deren Achsen alle parallel zur z-Achse liegen.

d) Zugeordnete Kugelfunktionen.

Die zugeordneten Funktionen

$$P_n^m(\cos\vartheta) = \sin^m\vartheta \frac{d^m P_n(\cos\vartheta)}{d(\cos\vartheta)^m}$$

sind darzustellen durch

(25a) $$\frac{\sin^m\vartheta}{2^n(n)!} \frac{d^{n+m}(\mu^2-1)^n}{d\mu^{n+m}}$$

und als Integral durch

(25b) $$\frac{(n+m)!}{n!} \frac{i^m}{\pi} \int_0^\pi (\mu + \cos\varphi\sqrt{\mu^2-1})^n \cos m\varphi\, d\varphi.$$

Die zugeordneten Funktionen erfüllen die Differentialgleichung:

(27) $$\left(n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right) y + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{dy}{d\vartheta}\right) = 0.$$

Statt dieser zugeordneten Funktionen führt *Helmholtz* die Funktionen

(28) $$P_{nm} = \frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m}$$

ein, welche die Differentialgleichung

(29) $$(1-\mu^2)\frac{d^2y}{d\mu^2} - 2(m+1)\mu\frac{dy}{d\mu} + (n(n+1) - m(m+1))\,y = 0$$

erfüllen.

e) Integralsätze.

1. Sind $Y_n(\varphi, \vartheta)$ und $Y_m(\varphi, \vartheta)$ zwei beliebige Kugelfunktionen, so ist

(30) $$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_n Y_m \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = 0 \quad \text{für} \quad m \neq n.$$

Y_n und Y_m sind also „orthogonal".

ϑ und φ sind auffaßbar als Polarkoordinaten. $\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = d\sigma$ bedeutet dann ein an der Oberfläche der Kugel vom Radius $r = 1$ gelegenes Flächenelement.

2. Wird $m = n$ und bedeutet γ den Winkel eines Radius nach (ϑ, φ) gegen den festen Radius (ϑ', φ'), so ist

$$(31)\qquad \int_0^\pi\int_0^{2\pi} Y_n P_n(\cos\gamma)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\vartheta', \varphi').$$

Dabei ist

$$\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi - \varphi').$$

f) Entwicklungen nach Kugelfunktionen.

1. Entwicklung nach allgemeinen Kugelfunktionen:

$$(32)\qquad f(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta, \varphi).$$

Die Glieder Y_n der Entwicklung sind bestimmt durch

$$Y_n(\vartheta, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(\vartheta', \varphi') P_n(\cos\gamma)\sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\varphi'.$$

2. Entwicklung nach den symmetrischen Kugelfunktionen:

$$(33)\quad f(\vartheta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[a_{no}P_n(\cos\vartheta) + \sum_{m=1}^{n}(a_{nm}\cos m\varphi + b_{nm}\sin m\varphi)P_n^m(\cos\vartheta)\right]$$

Die Koeffizienten sind bestimmt durch:

$$a_{no} = \frac{2n+1}{n}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(\vartheta,\varphi)P_n(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$a_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(\vartheta,\varphi)P_n^m(\cos\vartheta)\cos m\varphi\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$b_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(\vartheta,\varphi)P_n^m(\cos\vartheta)\sin m\varphi\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

3. Entwicklung nach einfachen Kugelfunktionen:

$$(34)\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x),$$

die Koeffizienten c_n sind bestimmt durch

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(\mu)P_n(\mu)\, d\mu.$$

e:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\vartheta+r^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}r^n P_n(\cos\vartheta), \qquad (r<1)$$

$$\frac{m!}{\cdot\cdot(2m+1)}\left((2m+1)P_m(x)+(2m-3)\frac{(2m+1)}{2}P_{m-2}(x)\right.$$

$$\left.-7)\frac{(2m+1)(2m-1)}{2\cdot 4}P_{m-4}(x)+\ldots\right)$$

$$_{-2k}\cdot P_{m-2k}(x),$$

$$_{-2k}=(2m-4k+1)\frac{m(m-1)\ldots(2k+2)}{(2k+3)\ldots(2m-2k+1)}.$$

6. Zylinderfunktionen[1]).

a) Definitionen.

nderfunktionen sind Funktionen einer Variablen x und ters p, der beliebige (reelle) Werte annehmen kann. x ist die Funktion nur bei ganzzahligem p definiert. nderfunktionen sind gewisse Lösungen der Differential-

$$\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{p^2}{x^2}\right)y=0 \text{ (\textit{Besselsche} Differentialgleichung).}$$

meine Lösung heiße:

$$y=Z_p(x)^2).$$

ction $u=Z_p(r)\cdot e^{ip\varphi}$ genügt der Differentialgleichung wo φ das Azimut um die z-Achse, r den Abstand von edeutet, und u nicht von z abhängt (Zylindersymmetrie). unktionen erster Art $I_p(x)$ (*Besselsche* Funktionen). iniert:

ezialfall von $Z_p(x)$ aus der Bedingung, daß

$$I_p(0) \text{ endlich ist für } p\geqq 0$$

$$I_p(x)=0 \text{ ist für } x=\infty.$$

$$I_0(x)=1 \text{ für } x=0.$$

weiterer Formeln, Tabellen und Literaturangaben vgl. *Jahnke* nentafeln S. 90f.

emeinere Gleichung: $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{a}{x}\cdot\frac{dy}{dx}+\left(b^2-\frac{c^2}{x^2}\right)y=0$ hat die $_p(bx)$, wo $\alpha=\frac{1-a}{2}$ und $p^2=\alpha^2+c^2$.

2. bei ganzzahligem p als Grenzfall der zugeordneten Kugelfunktionen P_n^m (vgl. S. 61) für $n = \infty$, nämlich

(2) $$I_p(x) = (-1)^p \lim_{n=\infty} P_n^p\left(\cos\frac{x}{n}\right).$$

3. bei ganzzahligem p durch das Integral

(3) $$I_p(x) = \frac{(-i)^p}{\pi}\int_0^\pi e^{ix\cos\varphi}\cos p\varphi\, d\varphi.$$

Daraus folgt für gerades p

(3a) $$I_{2n} = \frac{(-1)^n}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)\cos 2n\varphi\, d\varphi = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\varphi)\cos 2n\varphi\, d\varphi,$$

für ungerades p

$$I_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\cos\varphi)\cos(2n+1)\varphi\, d\varphi$$

(3b) $$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\sin\varphi)\sin(2n+1)\varphi\, d\varphi.$$

4. $I_p(x)\cdot 2i^p = c_p$ ist der Koeffizient der Fourierentwicklung

(4) $$e^{ix\cos\omega} = \frac{1}{2}c_0 + c_1\cos\omega + c_2\cos 2\omega + \ldots + c_p\cos p\omega + \ldots$$

und wird demnach dargestellt durch die Potenzreihe

(4a) 5. $$I_p(x) = \frac{x^p}{p!\,2^p}\left(1 - \frac{x^2}{2(2p+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2p+2)(2p+4)} - \ldots\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{p+2k}}{2^{p+2k}\cdot k!\,(p+k)!}.$$

Für nicht ganzes p ist in dieser Summenformel $\Pi(p+k)$ statt $(p+k)!$ einzusetzen (vgl. S. 70).

b) Zylinderfunktionen zweiter Art.

Als Zylinderfunktionen zweiter Art werden verschiedene Funktionen gebraucht.

(5) 1. $$N_p(x) = -\frac{2}{\pi}K_p(x) = \frac{I_p(x)\cos p\pi - I_{-p}(x)}{\sin p\pi},$$

(6) 2. $$H_p^{(1)}(x) = I_p(x) + i N_p(x) = \frac{i}{\sin p\pi}\left(e^{-p\pi i} I_p(x) - I_{-p}(x)\right),$$

(7) 3. $$H_p^{(2)}(x) = I_p(x) - i N_p(x) = \frac{-i}{\sin p\pi}\left(e^{p\pi i} I_p(x) - I_{-p}(x)\right).$$

$H_p^{(1)}(x)$ und $H_p^{(2)}(x)$ heißen „*Hankelsche* Zylinderfunktionen". Ihr Aufbau

$$H^{(1)} = I + iN,\ H^{(2)} = I - iN \text{ ist analog } e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$
$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Diese Definitionen versagen für ganzes p. Durch Grenzübergang findet man hier die Entwicklung:

(8) 4. $$N_p(x) = \frac{2}{\pi}\left\{I_p(x)\left(\ln\frac{x}{2} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p}\right) + \ln\gamma\right) - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{p+2k}{k(p+k)} I_{p+2k} - \frac{1}{2}p! \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{p-k}\left(\frac{2}{x}\right)^{p-k} \frac{I_k}{k!}\right\}$$

$\ln\gamma = 0{,}57722 = \lim\limits_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$ heißt *Eulersche* Konstante.

c) Allgemeine Beziehungen.

Für alle bisher genannten Zylinderfunktionen Z_p gelten folgende Beziehungen:

1. Rekursionsformel:

(9) $$Z_{p-1} + Z_{p+1} = \frac{2p}{x} Z_p.$$

Hieraus folgt speziell:

$$Z_2 = \frac{2}{x} Z_1 - Z_0,$$
$$Z_3 = -\frac{4}{x} Z_0 - \left(1 - \frac{8}{x^2}\right) Z_1 \quad \text{usw.}$$
$$Z_{-1} = -Z_1,$$
$$Z_{-2} = \frac{2}{x} Z_1 - Z_0 \quad \text{usw.}$$

und allgemein für ganzzahliges p:

(9a) $$Z_{-p} = (-1)^p Z_p.$$

Aus Z_0 und Z_1 sind daher alle Z_p für ganzzahliges p ableitbar.

2. Differentialformeln:

(10) $$\frac{dZ_p}{dx} = -\frac{p}{x} Z_p + Z_{p-1}.$$

Hieraus folgt speziell:

$$\frac{dZ_0(x)}{dx} = -Z_1(x),$$
$$\frac{dZ_1(x)}{dx} = -\frac{1}{x} Z_1 + Z_0 \quad \text{usw.}$$

8. Integralformeln:

(11a) $$\int x^{p+1} Z_p(x)\, dx = x^{p+1} Z_{p+1}(x).$$

Speziell ist:

$$\int x\, Z_0(x)\, dx = x\, Z_1 \quad \text{usw.}$$

(11b) $$\int x^{-p+1} Z_p(x)\, dx = -\, x^{-p+1} Z_{p-1}(x).$$

Orthogonalität der *Besselschen* Funktionen:

$$\int_0^1 I_0(\alpha_m x)\, I_l(\alpha_n x)\, x\, dx = 0 \qquad \text{wenn} \qquad I_0(\alpha_m) = I_0(\alpha_n) = 0$$

$$\int_0^1 [I_0(\alpha_m x)]^2\, x\, dx = \frac{[I_1(\alpha_m)]^2}{2} \qquad \text{„} \qquad I_0(\alpha_m) = 0.$$

d) Die allgemeine Lösung der Besselschen Differentialgleichung.

Für die allgemeine Lösung der *Besselschen* Differentialgleichung sind zwei voneinander unabhängige Zylinderfunktionen zu verwenden.

Hierfür eignen sich:

a) für reelles x

1. $I_p(x)$ und $I_{-p}(x)$ außer für ganzzahliges p, da $I_p(x)$ und $I_{-p}(x)$ in diesem Falle numerisch gleich werden.

2. $I_p(x)$ und $N_p(x)$.

b) für rein imaginäres x

$I_p(ix)$ und $H_p^{(1)}(ix)$.

e) Spezielle Formen von Zylinderfunktionen,

wenn der Parameter ein Bruch mit dem Nenner 2 ist.

1. $$I_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

$$I_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)$$

$$I_{\frac{5}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\left(\frac{3}{x^2} - 1\right) \sin x - \frac{3}{x} \cos x\right)$$

usw.

2. $$I_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

$$I_{-\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(-\sin x - \frac{\cos x}{x}\right)$$

$$I_{-\frac{5}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{3}{x} \sin x + \left(\frac{3}{x^2} - 1\right) \cos x\right)$$

usw.

3. $H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, i e^{ix}$ $\qquad H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, i e^{-ix}$

$H_{-\frac{1}{2}}^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{ix}$ $\qquad H_{-\frac{1}{2}}^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{ix}$

4. $N_{\frac{1}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$ $\qquad N_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$

f) Grenzwerte für kleines x.

1. Reelles Argument.

$\lim x = 0$:

a) $I_0(x) = 1, \qquad I_p(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^p}{\Pi(p)}$, wenn $p > 0$

$I_1(x) = \frac{x}{2}, \qquad I_p(o)\begin{cases} = 0, & \text{wenn } p < 0 \text{ und ganzzahlig} \\ = \infty, & \text{wenn } p < 0 \text{ und nicht ganzzahlig} \end{cases}$

$I_2(x) = \frac{x^2}{8}$

b) $N_0(x) = -\frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{\gamma x}$, wo $\gamma = 1{,}7811\ldots$ ist

$N_1(x) = -\frac{2}{\pi x}$

c) $H_0^{(1)}(x) = 1 - \frac{2i}{\pi}\ln\frac{2}{\gamma x}$

2. Imaginäres Argument.

a) $I_0(ix) = 1$

$I_1(ix) = \frac{ix}{2}$

b) $N_0(ix) = -\frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{\gamma x} + i$

$N_1(ix) = -\frac{x}{2} + i\frac{2}{\pi x}$

c) $H_0^{(1)}(ix) = -\frac{2i}{\pi}\ln\frac{2}{\gamma x}$

$H_1^{(1)}(ix) = -\frac{2}{\pi x}$

g) Negativer Parameter.

(12) $$I_{-p} = I_p \cdot \cos p\pi - N_p \cdot \sin p\pi.$$

Es wird also:

$$I_{-p} = (-1)^p I_p, \quad N_{-p} = (-1)^p N_p \text{ für ganzzahliges } p.$$

$$I_{-p} = -N_p \sin\left(\left(n + \tfrac{1}{2}\right)\pi\right) = N_p \cdot (-1)^{n+1} = N_p(-1)^{p+\frac{1}{2}} \text{ für } p = n + \tfrac{1}{2}.$$

Negativ reelles Argument.

Ist p ganzzahlig, so wird

$$I_p(-x) = (-1)^p I_p(x). \tag{13}$$

Ist $p = n + \frac{1}{2}$, so wird

$$I_p(-x) = \pm\, i\, I_p(x) \text{ (mit unbestimmtem Vorzeichen).} \tag{14}$$

Für beliebiges p wird $I_p(-x)$ vieldeutig wegen des Faktors x^p.

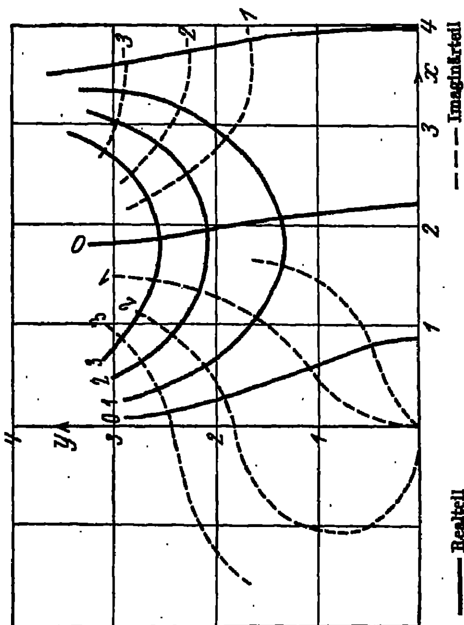


Fig. 17. $N_0(x+iy)$.

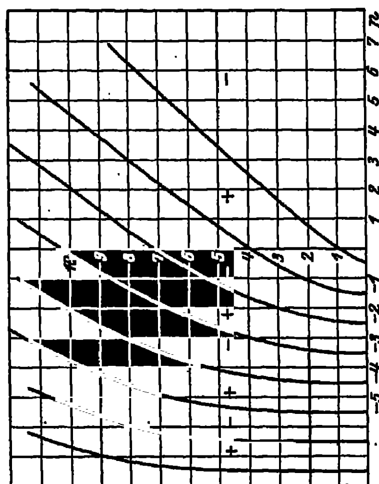


Fig. 19. $N_p(x) = 0$.

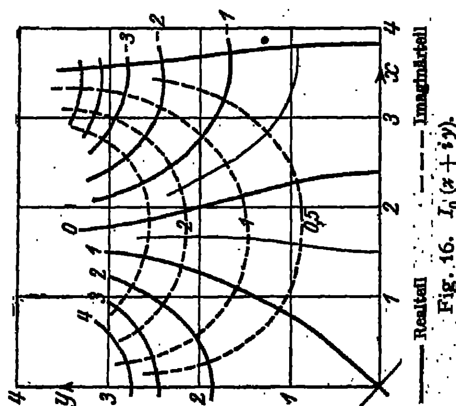


Fig. 16. $I_0(x+iy)$.

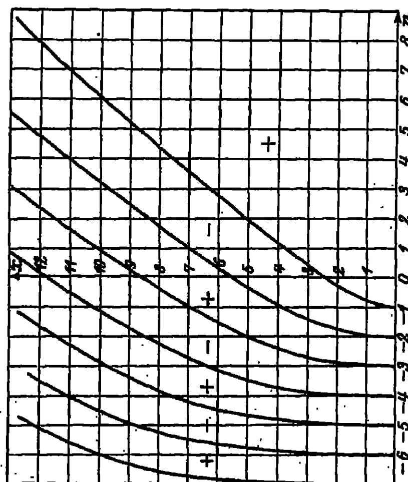


Fig. 18. Kurven: $I_p(x) = 0$.

h) Asymptotische Werte für große Werte des Arguments x und im Vergleich zu x kleinem p[1]).

$\lim x = \infty$.

(15a) $$H_p^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot e^{ix} i^{-(p+\frac{1}{2})}\ ^{2)}$$

(15b) $$H_p^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot e^{-ix} i^{+(p+\frac{1}{2})},$$

daraus wegen $2 I_p = H_p^{(1)} + H_p^{(2)}$:

$$I_p(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ für gerades } p$$

$$= \pm \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ für ungerades } p.$$

Analogie zu den Exponentialfunktionen.

1. $I_p(x)$ entspricht $\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$.

Es ist periodisch für großes x mit der Periode 2π.

2. $H_p^{(1)}(ix)$ entspricht e^{-x}.

Es ist monoton abfallend, asymptotisch auf Null.

3. $H_p^{(2)}(ix)$ entspricht e^{x}.

Es ist monoton nach ∞ ansteigend.

i) Entwicklung nach Zylinderfunktionen.

In Analogie zu den *Fourierschen* Reihen gilt (unter Voraussetzung der Konvergenz):

(16) $$f(x) = \sum_\alpha A_\alpha I_0(\alpha x) + A_0, \quad \text{wo } A_0 = \int_0^1 f(t)\, t\, dt \text{ ist,}$$

$$\text{und } A_\alpha = \frac{2}{[I_1(\alpha)]^2} \int_0^1 f(t)\, I_0(\alpha t)\, t\, dt.$$

Hierbei ist die Summe zu erstrecken über die sämtlichen Wurzeln $x = \alpha$ der Gleichung $I_0(x) = 0$.

Entsprechend den *Fourierschen* Integralen gilt ferner die Beziehung:

(17) $$f(x) = \int_0^\infty I_0(sx)\, s\, ds \int_0^\infty f(t)\, I_0(st)\, t\, dt.$$

---

[1]) Wegen genauerer Abschätzung vgl. z. B. *Jahnke* u. *Emde*, Funktionentafeln, S. 102.

[2]) Vgl. Anm. S. 58.

7. Gammafunktion[1]).

Das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n = n!$ heißt n Fakultät. Der Ausdruck

$$\Pi(x) = \lim_{n=\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot n^x}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$$

ist für ganzzahliges positives x gleich $x!$ Dieser Ausdruck, der für jedes komplexe, von einer negativen ganzen Zahl verschiedene x konvergiert, liefert daher eine Funktion, welche die nur für ganze positive x definierte Funktion $x!$ zwischen diesen Werten interpoliert und für negative x (sowie für das komplexe Gebiet) extrapoliert. [Es können noch beliebig viele andere Funktionen angegeben werden, die das gleiche leisten, z. B.

$$\Pi(x) \cdot \cos(2\pi n x)].$$

Die Gammafunktion $\Gamma(x)$ kann folgendermaßen definiert werden:

(1) $$\Gamma(x) = \Pi(x-1) = \lim_{n=\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)},$$

(2) $$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt \quad (\textit{Eulersches} \text{ Integral}).$$

Beide Definitionen laufen auf dasselbe hinaus.

Es gilt die Integraldarstellung

(3) $$\ln \Gamma(x) = \int_0^\infty \left[(x-1)e^{-t} - \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{1 - e^{-t}}\right] \frac{dt}{t}.$$

Allgemein gilt

(4) $$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x), \qquad \Pi(x+1) = (x+1) \cdot \Pi(x)$$

(5) $$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} = \Pi(-x) \cdot \Pi(x-1).$$

Wenn daher $\Gamma(x)$ in einem Intervall zwischen zwei ganzen Zahlen bzw. in einem vertikalen Parallelstreifen der komplexen Ebene (z. B. zwischen 1 und 2) bekannt ist, so ist $\Gamma(x)$ für beliebige Werte leicht berechenbar.

Spezielle Werte:

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1 = \Pi(0) = \Pi(1),$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} = \Pi(-\tfrac{1}{2}),$$

$$\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} = \Pi(\tfrac{1}{2}),$$

$$\Gamma(-\tfrac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi} = \Pi(-\tfrac{3}{2}),$$

$$\frac{1}{\Gamma(0)} = 0,$$

[1]) Tabellen usw. vgl. *Jahnke* u. *Emde*, Funktionentafeln, S. 26.

$\frac{1}{\Gamma(-n)} = 0$, wo n eine positive ganze Zahl bedeutet,

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\ldots x \cdot \Gamma(x).$$

Das Residuum von $\Gamma(x)$ bei $x = -n$ ist: $\frac{(-1)^n}{n!}$.

Für sehr große positive x ist

$$\ln \Pi(x) \sim (x + \tfrac{1}{2}) \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi} \text{ (vgl. S. 12).}$$

8. Elliptische Integrale und Funktionen[1]).

$V = \int F(x, \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4})\,dx$ heißt ein elliptisches Integral, falls F eine *rationale* Funktion ist, und $\alpha + \beta x + \ldots \varepsilon x^4 = 0$ nur einfache Wurzeln hat. V läßt sich durch die Substitution $x = \frac{p+qt}{1+t}$ auf die Form bringen

$$(1) \qquad V = \int \Phi(t, \sqrt{\pm(t^2+\lambda)(t^2+\mu)})\,dt = \int \Phi(t, T)\,dt,$$

wo Φ eine rationale Funktion, λ, μ reelle Parameter sind. $\Phi(t, T)$ kann man auf die Form bringen $\frac{M+Nt}{M'+N't}$, wo M usw. ganze Funktionen von t^2 und T sind, bzw. durch Erweitern mit $M' - N'T$ in die Form $P + Qt$, wo P und Q rationale Funktionen von t^2 und T sind, also $V = \int P\,dt + \int Q \cdot t\,dt$. Das Integral $\int Q t\,dt$ kann durch die Substitution $u = t^2$ auf elementare Funktionen zurückgeführt werden. $\int P\,dt$ andererseits auf die Form

$$(2) \qquad \int \Psi(t^2)\,dt + \int \frac{\Phi(t^2)\,dt}{T},$$

worin Ψ und Φ rationale Funktionen sind. Ersteres führt auf elementare Funktionen, letzteres führt auf ein elliptisches Integral.

T kann die folgenden Formen haben:

1. $T = \sqrt{+(t^2-\lambda^2)(t^2-\mu^2)}$
2. $T = \sqrt{-(t^2-\lambda^2)(t^2-\mu^2)}$
3. $T = \sqrt{+(t^2+\lambda^2)(t^2-\mu^2)}$
4. $T = \sqrt{-(t^2+\lambda^2)(t^2-\mu^2)}$
5. $T = \sqrt{+(t^2+\lambda^2)(t^2+\mu^2)}$.

Alle können auf dieselbe Form gebracht werden durch Änderung der Variablen. Man setze

[1]) Wegen Tabellen usw. vgl. *Jahnke* u. *Emde*, Funktionentafeln, S. 46.

1. $\frac{\lambda^2}{\mu^2} = k^2 < 1.$ Für $t^2 < \lambda^2$ setze $t = \lambda x$
für $t^2 > \lambda^2$ setze $t = \frac{\mu}{x}$

2. $\frac{\mu^2 - \lambda^2}{\mu^2} = k^2$

3. $t^2 > \mu^2$ $\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2} = k^2$

4. $t^2 < \mu^2$ $\frac{\mu^2}{\lambda^2 + \mu^2} = k^2$

5. $\lambda^2 < \mu^2$ $\frac{\mu^2 - \lambda^2}{\lambda^2} = k^2.$

Dann wird

(3) $$\int \frac{dt}{T} = A \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

wo A in den 5 Fällen einen verschiedenen, von λ, μ, k abhängigen konstanten Wert erhält. k heißt *Modul.*

$\Phi(t^2)$ kann zerlegt werden in ganze Funktionen und Partialbrüche:

(4) $$\Phi(t^2) = \sum_n a_n t^{2n} + \sum_n \frac{b_n}{(1 + c_n t^2)^n}.$$

Nun gilt die Rekursionsformel:

(5) $$(2n-1)k^2 \int \frac{t^{2n}\,dt}{T} - (2n-2)(1+k^2) \int \frac{t^{2n-2}\,dt}{T} + (2n-3) \int \frac{t^{2n-4}\,dt}{T} = t^{2n-3} \cdot \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}.$$

Daher ist es möglich, alle $\int \frac{t^{2n}\,dt}{T}$ auf $\int \frac{t^2\,dt}{T}$ und $\int \frac{dt}{T}$ zurückzuführen.

Die Glieder der Form $\int \frac{1}{(1+c_n t^2)^n} \frac{dt}{T}$ lassen sich in ähnlicher Weise auf $\int \frac{dt}{T}$ und $\int \frac{dt}{(1+c_n t^2)\,T}$ zurückführen. Die Integrale $\int \frac{dt}{T}$, $\int \frac{t^2\,dt}{T}$ und $\int \frac{dt}{(1+c_n t^2)\,T}$ heißen *Normalintegrale 1., 2. und 3. Gattung.*

Elliptische Funktionen.

Die elliptischen Funktionen sind die Umkehrfunktionen der elliptischen Integrale. Sie sind doppeltperiodische Funktionen des komplexen Arguments u mit den zwei komplexen Perioden ω_1 und ω_2, so daß

(6) $$f(u) = f(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2) \qquad (m_1, m_2 \text{ ganze Zahlen})$$

wird. Sie sind im Endlichen überall bis auf Pole regulär. Das Verhältnis

$$\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

stets nicht reell. Die komplexe u-Ebene ist dann in Parallelo-
ıme eingeteilt, deren Eckpunkte ein Gitter $u_0 + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$
n. In entsprechenden Punkten verschiedener Periodenparallelo-
ıme hat dann $f(u)$ den gleichen Wert. Ist α der Winkel zwischen
Seiten a und b des Parallelogramms, so wird $\frac{\omega_1}{\omega_2} = e^{i\alpha} \cdot \frac{a}{b}$, also
Größe $q = e^{\frac{i\pi\omega_1}{\omega_2}}$

$$q = e^{i\pi\omega} = e^{-\frac{a}{b}\pi\sin\alpha}\left[\cos\left(\frac{a}{b}\pi\cos\alpha\right) + i\sin\left(\frac{a}{b}\pi\cos\alpha\right)\right].$$

Jede doppeltperiodische Funktion $f(u, \omega_1, \omega_2)$ kann als eine
nale Funktion der beiden elliptischen Funktionen $\wp(u, \omega_1, \omega_2)$
$\wp'(u, \omega_1, \omega_2)$ dargestellt werden; dabei ist

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{m_1, m_2}{}' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right]$$

$$\wp'(u) = \frac{d\wp(u)}{du} = -2\sum_{m_1, m_2}{}' \frac{1}{(u-w)^3}$$

$w = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ bedeutet und die Summen über alle ganz-
gen Werte für m_1 und m_2 mit Ausschluß von $m_1 = m_2 = 0$ zu
ecken sind.

Das führt zu folgender Entwicklung:

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{20}g_2u^2 + \frac{1}{28}g_3u^4 + \frac{1}{1200}g_2^2u^6 + \frac{3}{6160}g_2g_3u^8 + \ldots$$

$$g_2 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4\left[\frac{1}{12} + 20\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3q^{2n}}{1-q^{2n}}\right]$$

$$g_3 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6\left[\frac{1}{216} - \frac{7}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5q^{2n}}{1-q^{2n}}\right].$$

hat in den Punkten $u = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ Pole 2. Ordnung, $\wp'(u)$
ıier Pole 3. Ordnung.

Weiter werden folgende (nicht mehr doppeltperiodische) Funk-
n benutzt:

$$\zeta(u) = \int_0^u \wp(u)\,du, \qquad \sigma(u) = u \cdot e^{\int_0^u\left(\zeta(u) - \frac{1}{u}\right)du}.$$

st dabei

$$\zeta(u + \omega_1) = \zeta(u) + \eta_1, \qquad \zeta(u + \omega_2) = \zeta(u) + \eta_2.$$

sind η_1 und η_2 von u unabhängige Konstanten, und zwar

$$\eta_2 = \frac{\pi^2}{3\omega_2}\left[1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\right];$$

während η_1 daraus durch Vertauschung von ω_2 und ω_1 hervorgeht.

(12) $\sigma(u+\omega_1) = -e^{\eta_1\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)}\cdot\sigma(u),\quad \sigma(u+\omega_2) = -e^{\eta_2\left(u+\frac{\omega_2}{2}\right)}\cdot\sigma(u).$

Liouvillesche Sätze:

1. Es gibt keine nicht konstante elliptische Funktion, die im Periodenparallelogramm überall endlich ist.
2. Die Summe der Residuen im Periodenparallelogramm ist Null.
3. Die elliptische Funktion nimmt jeden Wert im Periodenparallelogramm gleich oft an wie den Wert ∞.

Jede n-wertige elliptische Funktion mit den n *einfachen* Polen $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ läßt sich darstellen durch eine Reihe

(13) $$f(u) = A + \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \zeta(u-\alpha_k),$$

wo a_k die zu den Polen α_k gehörigen Residuen sind.

Jede n-wertige elliptische Funktion mit den Polen $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ der Ordnungen $\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n$ läßt sich darstellen durch:

(14) $$f(u) = A + \sum_{k=1}^{n} [a_k \zeta(u-\alpha_k) + a_k' \wp(u-\alpha_k) + a_k'' \wp'(u-\alpha_k) + \cdots + a_k^{(\nu_k-1)} \wp^{(\nu_k-2)}(u-\alpha_k)].$$

Ist

$$u = \int_{\infty}^{z} \frac{dz}{2\cdot w},$$

wo

$$w = \frac{1}{2}\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3} = \sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}$$

mit

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

so wird umgekehrt

$$z = \wp(u) = \wp(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2),$$

$$\frac{dz}{du} = \wp'(u) = 2\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)} = 2w.$$

Dabei ist

$$\wp(0) = \wp(\omega_1) = \wp(\omega_2) = \infty,$$

$$\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = e_1, \qquad \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = e_2, \qquad \wp\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right) = e_3.$$

z ist eine doppeltperiodische Funktion von u. u ist eine unendlich vielwertige Funktion von z, die auf der zu ω gehörigen, bei $e_1 e_2 e_3$ und ∞ verzweigten *Riemannschen* Fläche selbst unverzweigt ist.

Setzt man

(15) $$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = F(k,\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

wo $x = \sin\varphi$, so nennt man φ die „Amplitude" von u. Das führt auf folgende Funktionen:

(16a) $$x = \sin\operatorname{amp}(u) = \operatorname{sn}(u) = u - (1 + k^2)\frac{u^3}{3!} + \dots$$

(16b) $$\sqrt{1 - x^2} = \cos\operatorname{amp}(u) = \operatorname{cn}(u) = 1 - \frac{u^2}{2!} + (1 + 4k^2)\frac{u^4}{4!} - \dots$$

(16c) $$\sqrt{1 - k^2 x^2} = \Delta\operatorname{amp}(u) = \operatorname{dn}(u) = 1 - k^2\frac{u^2}{2!} + (4k^2 + k^4)\frac{u^4}{4!} - \dots$$

sn, cn, dn sind die *Jacobischen* elliptischen Funktionen, und zwar hat

$\operatorname{sn}(u)$ die Perioden $\omega_1 = 4K$, $\omega_2 = 2iK'$

$\operatorname{cn}(u)$ die Perioden $\omega_1 = 4K$, $\omega_2 = 2K + 2iK'$

$\operatorname{dn}(u)$ die Perioden $\omega_1 = 2K$, $\omega_2 = 4iK'$,

wobei

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}, \qquad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2\sin^2\varphi}} \quad \text{und} \quad k'^2 = 1 - k^2.$$

Zur Berechnung von sn, cn, dn dienen außer obigen Reihen auch die Formeln

(17) $$\operatorname{sn}(u) = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}, \qquad \operatorname{cn}(u) = \sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)}, \qquad \operatorname{dn}(u) = \sqrt{k'}\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)},$$

wobei $v = \frac{u}{2K}$, $q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$ und die vier *Thetafunktionen* $\vartheta_0\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3$ durch Reihen darstellbar sind:

(18) $$\begin{cases} \vartheta_0(v, q) = 1 - 2q\cos 2\pi v + 2q^4\cos 4\pi v - 2q^9\cos 6\pi v + \dots \\ \vartheta_1(v, q) = 2q^{\frac{1}{4}}\sin\pi v - 2q^{\frac{9}{4}}\sin 3\pi v + 2q^{\frac{25}{4}}\sin 5\pi v - \dots \\ \vartheta_2(v, q) = 2q^{\frac{1}{4}}\cos\pi v + 2q^{\frac{9}{4}}\cos 3\pi v + 2q^{\frac{25}{4}}\cos 5\pi v + \dots \\ \vartheta_3(v, q) = 1 + 2q\cos 2\pi v + 2q^4\cos 4\pi v + 2q^9\cos 6\pi v + \dots \end{cases}$$

Literatur.

Knopp: Funktionentheorie (Sammlung Göschen). — *Fricke:* Funktionentheoretische Vorlesungen (Leipzig: Teubner). — *Hurwitz-Courant:* Funktionentheorie (Berlin: Julius Springer). — *Burchhardt:* Funkt.-theor. Vorlesungen, Berlin (VWV). — Lehrbücher der Differentialrechnung, s. S. 24. — Speziell zu den Kugel- und Zylinderfunktionen: *Courant-Hilbert* (Berlin: Julius Springer). — *Riemann-Weber:* Part. Diff.-Gl. d. math. Physik (Braunschweig: Vieweg). — *Fricke:* (s. o.). — Zu den elliptischen Funktionen: *Hurwitz-Courant* (s. o.). — *Fricke* (s. o.). — *Burchhardt* (s. o.), Bd. II.

Fünfter Abschnitt.

Transformationen.

A. Allgemeines über Transformationen.

1. Bedeutung einer Transformation.

Eine Transformation ordnet einem Wertesystem $x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$ ein anderes $x_1' x_2' \ldots x_n'$ zu durch ein System von Gleichungen der Form

$$x_1' = f_1(x_1 x_2 \ldots x_n); \quad x_2' = f_2(x_1 x_2 \ldots x_n), \ldots, x_n' = f_n(x_1 x_2 \ldots x_n).$$

Die f_i sollen im folgenden stetige Funktionen mit von Null verschiedener Funktional-Determinante (vgl. S. 80) sein.

Eine solche Transformation bedeutet geometrisch

1. eine Koordinatenänderung. $x_1 x_2 \ldots x_n$ sind die ursprünglichen Koordinaten eines Punktes einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit (bzw. homogene Koordinaten einer $n-1$-dimensionalen Mannigfaltigkeit). $x_1' x_2' \ldots x_n'$ sind die neuen Koordinaten desselben Punktes.
2. eine Verschiebung des Punktes $x_1 x_2 \ldots x_n$ in die neue Lage $x_1' x_2' \ldots x_n'$ im selben Koordinatensystem.
3. eine Abbildung der Mannigfaltigkeit $x_1 x_2 \ldots x_n$ auf eine andere $x_1' x_2' \ldots x_n'$.

1. Koordinatenänderung. Wir gehen aus von einem *Cartesischen* Koordinatensystem.

a) Sind die $f_i(x_1 \ldots x_n)$ *beliebige* Funktionen, so hat man ein neues im allgemeinen krummliniges Koordinatensystem (Spezialfälle siehe B. Koordinatensysteme).

b) Sind die f_i *lineare* Funktionen der x_k, so erhält man
   a) für gewöhnliche Koordinaten ein geradliniges (i. a. schiefwinkliges) Koordinatensystem, bestehend aus parallelen äquidistanten Geraden (affines Koordinatensystem),
   b) für homogene Koordinaten ein geradliniges Koordinatensystem, bestehend aus $(n-1)$ Strahlen-(Ebenen-)bündeln (projektives Koordinatensystem).

2. Verschiebung.

a) Sind die f_i beliebige stetige Funktionen, so erhält man eine endliche Verzerrung, bei welcher ursprünglich gerade Linien zu Kurven werden.

b) Sind die f_i *lineare* Funktionen, so erhält man eine homogene Verzerrung. Gerade und Ebenen bleiben solche. Sind sie ursprünglich parallel, so bleiben sie es. Kegelschnitte und Flächen 2. Grades bleiben solche unter Änderung ihrer Achsenrichtungen und Verhältnisse. Konjugierte Durchmesser bleiben konjugiert.

3. Abbildung.

a) Durch beliebige Funktionen f_i wird die Mannigfaltigkeit $x_1 x_2 \ldots x_n$ auf eine andere $x_1' \ldots x_n'$ abgebildet. Hierbei ist i. a. die Abbildung nicht eindeutig, d. h. einem Punkt $x_1 \ldots x_n$ entsprechen mehrere Punkte $x_1' \ldots x_n'$, bzw. mehrere Punkte $x_1 \ldots x_n$ ergeben denselben Punkt $x_1' \ldots x_n'$.

Für $n = 2$ ist die Abbildung konform, wenn

$$\frac{\partial x_1'}{\partial x_1} = \frac{\partial x_2'}{\partial x_2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial x_1'}{\partial x_2} = -\frac{\partial x_2'}{\partial x_1}.$$

b) Durch lineare Funktionen f_i wird die ganze Ebene $x_1 \ldots$ auf die ganze Ebene $x_1' \ldots$ eindeutig abgebildet. Sind die x gewöhnliche Koordinaten, so entsprechen den ∞ fernen Punkten wieder ∞ ferne, nicht aber für homogene Koordinaten.

2. Spezielle Transformationen.

a) Lineare Transformation.

Die *lineare* homogene Transformation, zunächst für *drei Koordinaten,* ist dargestellt durch das Gleichungssystem

(1)
$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ x_2' &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ x_3' &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3. \end{aligned}$$

Ihre geometrische Bedeutung ist

a) eine kollineare Transformation (projektive Transformation) in der Ebene, indem man die x_i und x_i' als *homogene* Koordinaten in der Ebene auffaßt:

$$x = \frac{x_1}{x_3}; \quad y = \frac{x_2}{x_3}; \quad x' = \frac{x_1'}{x_3'}; \quad y' = \frac{x_2'}{x_3'}.$$

Gerade und Kegelschnitte bleiben solche.
Parallele Liniensysteme werden zu Strahlenbüscheln.
Harmonische Strahlenbüschel bleiben harmonisch.
Der ∞ ferne Punkt wird im allgemeinen zu einem endlichen.

Die Transformation ist äquivalent der folgenden:

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}; \quad y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}.$$

Ebenso ergibt sich eine kollineare Transformation im Raum mit 4 homogenen Variablen.

b) eine affine Transformation im Raum, wenn die x_i, x_i' gewöhnliche inhomogene Parallelkoordinaten sind, d. h. Gerade und Ebenen, Kegelschnitte und Flächen 2. Grades bleiben solche. Parallele Gerade und Ebenen bleiben parallel. Richtungen und Winkel werden im allgemeinen geändert. Der Nullpunkt bleibt Nullpunkt. Der ∞ ferne Punkt bleibt im Unendlichen.

Die lineare Transformation für n Variable ist gegeben durch die Matrix a ihrer Koeffizienten:

(2) $$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Die Transformation heißt singulär, wenn ihre Determinante verschwindet.

Zwei nacheinander ausgeübte Transformationen sind äquivalent einer einzigen, deren Matrix c gleich dem Produkt $(b\,a)$ der beiden Matrizes a und b ist. Dieses wird gebildet wie das Produkt zweier Determinanten (s. S. 8, Formel (7), 1). ***Die Faktoren sind im allgemeinen nicht vertauschbar:***

(3) $$c = (b\,a) \neq (a\,b).$$

Für drei nacheinander ausgeübte Transformationen gilt

(4) $$d = c(b\,a) = (c\,b)\,a,$$

d. h. sie ist äquivalent einer Transformation a und einer auf sie folgenden $(b \cdot c)$. Die Matrix der inversen Transformation, d. h. einer solchen, die die erste (a) rückgängig macht, heißt a^{-1}.

Die Transformation a^{-1} lautet:

(5) $$x_1 = \frac{A_{11}}{a}x_1' + \frac{A_{21}}{a}x_2' + \frac{A_{31}}{a}x_3' + \cdots$$

usw., wo a die Determinante der a_{ik} und A_{ik} die Unterdeterminante zu a_{ik} bedeutet.

Die Transformation $(a\,a^{-1})$, deren Matrix lautet:

(6) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

heißt „*identische Transformation*". Man schreibt $a\,a^{-1} = 1$.

b) Orthogonale Transformationen.

Ein durch die Transformation $x' = f_1(x, y, z)$, $y' = f_2$, $z' = f_3$ gebildetes neues Koordinatensystem ist orthogonal, d. h. die Flächen $x' = a$, $y' = b$, $z' = c$ stehen aufeinander senkrecht, wenn

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial z} = 0\\
(7)\qquad &\frac{\partial f_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial z} = 0\\
&\frac{\partial f_2}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial z} = 0.
\end{aligned}
$$

Eine lineare Transformation heißt *orthogonal*, wenn

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
&a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + a_{3i}^2 + \dots = 1\\
&a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \dots = 0 \qquad \text{für } i \neq j.
\end{aligned}
$$

Dann ist

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots = x_1'^2 + x_2'^2 + \dots$$

Geometrisch bedeutet die Transformation eine Drehung oder Spiegelung ohne Verzerrung, wenn die x_i gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten bedeuten. Eine orthogonale Transformation hat $\frac{n(n-1)}{2}$ unabhängige Koeffizienten. Alle Kreise (Kugeln) um den Nullpunkt werden in sich übergeführt.

Durch lineare Transformation kann eine quadratische Form $\varphi = \sum_{i,j} c_{ij} x_i x_j$ auf ∞ viele Weisen auf die Form $\varphi' = \sum_i c_i x_i'^2$ gebracht werden. Hierbei ist, falls die c_i reell sind, in allen Fällen die Zahl der positiven c_i dieselbe („Trägheitsgesetz"). Sind alle c_i positiv, so heißt die Form *definit*. Sie ist dann für alle möglichen reellen x_i positiv.

Geometrisch bedeutet dies, daß ein projektives Koordinatensystem gefunden werden kann, in dem die Koordinatenachsen zugleich konjugierte Durchmesser eines gegebenen Kegelschnittes sind. Die $\sqrt{\frac{1}{c_i}}$ sind dann die Koordinaten der Achsenabschnitte des Koordinatensystems.

Durch orthogonale lineare Transformationen kann $\varphi = \sum c_{ij} x_i x_r$ auf $n!$ Weisen in die Form $\varphi' = \sum c_i x_i'^2$ gebracht werden.

c) Infinitesimale Transformationen.

$$
(9)\qquad
\begin{aligned}
x' &= x + \varepsilon f_1(x, y, z),\\
y' &= y + \varepsilon f_2(x, y, z),\\
z' &= z + \varepsilon f_3(x, y, z),
\end{aligned}
$$

wo ε eine kleine Größe bedeutet, deren Potenzen $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots$ vernachlässigt werden können, heißt eine *infinitesimale Transformation.*

Zwei infinitesimale Transformationen nacheinander ausgeübt ergeben, wenn

$$\begin{aligned} x'' &= x' + \varepsilon f_1'(x', y', z') \\ y'' &= y' + \varepsilon f_2'(x', y', z') \\ z'' &= z' + \varepsilon f_3'(x', y', z') \end{aligned}$$

gesetzt wird,

$$x'' = x + \varepsilon [f_1(x, y, z) + f_1'(x, y, z)] + \varepsilon^2(\ldots),$$

also

$$\begin{aligned} x'' &= x + \varepsilon(f_1 + f_1') \\ y'' &= y + \varepsilon(f_2 + f_2') \\ z'' &= z + \varepsilon(f_3 + f_3'). \end{aligned} \tag{10}$$

Sie sind also in der Reihenfolge vertauschbar.

Eine infinitesimale *lineare* Transformation ist:

$$\begin{aligned} x' &= \varepsilon\alpha + (1 + \varepsilon\alpha_1)x + \varepsilon\alpha_2 y + \varepsilon\alpha_3 z \\ y' &= \varepsilon\beta + \varepsilon\beta_1 x + (1 + \varepsilon\beta_2)y + \beta_3 z \\ z' &= \varepsilon\gamma + \varepsilon\gamma_1 x + \varepsilon\gamma_2 y + (1 + \varepsilon\gamma_3)z. \end{aligned} \tag{11}$$

Sie ist zerlegbar in drei Teiltransformationen:

1. $x' = x + \varepsilon\alpha;\quad y' = y + \varepsilon\beta;\quad z' = z + \varepsilon\gamma$, d. h. *Verschiebung.*

2. $$\left.\begin{aligned} x' &= x + \varepsilon\alpha_1 x + \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_2 + \beta_1)y + \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_3 + \gamma_1)y \\ y' &= y + \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_2 + \beta_1)x + \varepsilon\beta_2 y + \frac{\varepsilon}{2}(\beta_3 + \gamma_2)z \\ z' &= z + \frac{\varepsilon}{2}(\gamma_1 + \alpha_3)x + \frac{\varepsilon}{2}(\beta_3 + \gamma_2)y + \varepsilon\gamma_3 z \end{aligned}\right\} \text{d. h. } \textit{Dehnung.}$$

3. $$\left.\begin{aligned} x' &= x + \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_2 - \beta_1)y + \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_3 - \gamma_1)z \\ y' &= y + \frac{\varepsilon}{2}(\beta_1 - \alpha_2)x + \frac{\varepsilon}{2}(\beta_3 - \gamma_2)z \\ z' &= z + \frac{\varepsilon}{2}(\gamma_1 - \alpha_3)x + \frac{\varepsilon}{2}(\gamma_2 - \beta_3)y \end{aligned}\right\} \text{d. h. } \textit{Drehung.}$$

3. Transformations-Determinante.

Bei der Transformation von Integralen spielt die zur Transformation $x_i = f_i(x_1' \ldots x_n')$ gehörende *Funktional-Determinante* D eine Rolle.

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{\partial(f_1 f_2 \ldots f_n)}{\partial(x_1 x_2 \ldots x_n)}. \tag{12}$$

1. Es ist

(13) $$\int\int\ldots\int F(x_1\, x_2 \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$
$$= \int\int\ldots\int F'(x_1'\, x_2' \ldots x_n')\cdot D\cdot dx_1'\, dx_2' \ldots dx_n',$$

d. h. die Volumen- bzw. Flächen-Elemente im alten und neuen Koordinatensystem verhalten sich wie $1 : D$.

2. Die Volumen- bzw. Flächen-Elemente werden bei der Verschiebung um den Faktor D vergrößert.

3. Die Volumen- bzw. Flächen-Elemente werden um den Faktor D vergrößert abgebildet.

Die Determinante der infinitesimalen Transformation von S. 79 wird:

(14) $$\frac{\partial(x'\, y'\, z')}{\partial(x\, y\, z)} = 1 + \varepsilon\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right).$$

4. Invarianten.

Ist eine Transformation $x_i = f_i(x_1',\ x_2', \ldots x_n')$ gegeben, so gibt es gewisse Funktionen, für welche gilt:

$$F(x_1,\ x_2, \ldots x_n) = F(x_1',\ x_2', \ldots x_n')$$

d. h., der Wert dieser Funktion bleibt ungeändert, wenn man in ihr an Stelle der ursprünglichen Variabeln die neuen einsetzt. Solche Funktionen heißen Invarianten der Transformation. Die Kenntnis der Invarianten ist wesentlich zur Beurteilung des Charakters einer Transformation.

Deutet man die Transformation geometrisch als Koordinatenänderung, so bezeichnet man die Invarianten auch als Skalare. Beispiele hierfür sind der Abstand zweier Punkte, Inhalt einer Fläche u. dgl. Der invariante Abstand zweier unendlich benachbarter Punkte: $ds = \sqrt{\sum_{i,k} g_{ik}\, dx_i\, dx_k} = \sqrt{\sum_{i,k} g_{ik}'\, dx_i'\, dx_k'}$, das „Linienelement", spielt eine besonders wichtige Rolle. Kennt man die Abhängigkeit der g_{ik} von den x_i, so sind dadurch auch alle (bei einer Koordinatentransformation invarianten) Maßverhältnisse innerhalb der durch die x_i beschriebenen Mannigfaltigkeit (Fläche, Raum, mehrdimensionales Gebiet) festgelegt. Die g_{ik} heißen deshalb Komponenten des Maßtensors (vgl. S. 172 u. 240).

Als Invariante wird auch häufig eine Funktion bezeichnet, welche bei der Transformation sich nur um einen Faktor ändert, der von den x_i unabhängig ist, also nur von den Parametern der Transformation abhängt.

Eine Gleichung oder Gleichungssystem, welches gültig bleibt beim Ersetzen aller x_i durch die neuen x_i', heißt kovariant.

B. Koordinaten-Systeme und Koordinaten-Transformationen.

a) Ebene Koordinaten-Systeme.

In der Ebene benutzt man u. a.:

1. **Das Cartesische Koordinaten-System** zweier sich rechtwinklig kreuzender äquidistanter Gradenscharen. Die infinitesimale Entfernung ds zweier Punkte ist gegeben durch[1])

(1) $ds^2 = dx^2 + dy^2$, also $g_{11} = 1, \quad g_{22} = 1, \quad g_{12} = 0,$
$g^{11} = 1, \quad g^{22} = 1, \quad g^{12} = 0, \quad |g| = 1,$

falls man den allgemeinen Ausdruck $ds^2 = \sum_i \sum_k dx^i \cdot dx^k \cdot g_{ik}$ zugrunde legt.

Der *Laplacesche* Operator Δ (vgl. S. 156 und 175) lautet hier:

(2) $$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.$$

2. **Affines, schiefwinkliges (geradliniges, äquidistantes) Koordinatensystem.** Der Abstand ds zweier infinitesimal benachbarter Punkte ist hier gegeben durch

(3) $$ds^2 = a^2\, dx_1{}^2 + b^2\, dx_2{}^2 + 2\, c^2\, dx_1\, dx_2,$$

wo $c^2 = a\, b \cos\varphi$ und φ der Winkel zwischen der x_1- und x_2-Achse ist. Also

$$g_{11} = a^2, \qquad g_{22} = b^2, \qquad g_{12} = a\, b \cos\varphi,$$
$$g^{11} = \frac{1}{a^2 \sin^2\varphi}, \qquad g^{22} = \frac{1}{b^2 \sin^2\varphi}, \qquad g^{12} = \frac{1}{a\, b} \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi},$$
$$|g| = a^2 b^2 - c^4 = a^2 b^2 \sin^2\varphi.$$

Hier wird

(4) $$\Delta V = \frac{1}{\sin^2\varphi}\left(\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 V}{\partial x_1{}^2} + \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2 V}{\partial x_2{}^2} + \frac{1}{a\, b} \cdot \cos\varphi \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x_1\, \partial x_2}\right).$$

Die Transformation auf *Cartesische* Koordinaten x, y heißt:

(5) $$\begin{aligned} x &= x_1 \alpha_1 + x_2 \beta_1 + \gamma_1 = x_1\, a \cdot \cos\alpha + x_2\, b \cos(\alpha + \varphi) + \gamma_1, \\ y &= x_1 \alpha_2 + x_2 \beta_2 + \gamma_2 = x_1\, a \cdot \sin\alpha + x_2\, b \cdot \sin(\alpha + \varphi) + \gamma_2, \end{aligned}$$

also

$$a^2 = \alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2,$$
$$b^2 = \beta_1{}^2 + \beta_2{}^2,$$
$$c^2 = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2, \quad \cos\varphi = -\frac{(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2)}{\sqrt{(\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2)(\beta_1{}^2 + \beta_2{}^2)}}$$

[1]) Wegen der Bedeutung der Symbole ds, g_{11}, g_{12} usw., sowie der Dreiindizes-Symbole vgl. S. 172ff.

Aufgelöst nach x_1, x_2 ergibt sich:

(5′)
$$x_1 = +\frac{x\cdot\beta_2}{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}} - \frac{y\cdot\beta_1}{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}} + \frac{\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}},$$
$$x_2 = -\frac{x\cdot\alpha_2}{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}} + \frac{y\cdot\alpha_1}{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}},$$

oder anders geschrieben:

(5″)
$$x_1 = -\frac{x\cdot\sin(\alpha+\varphi)}{a\sin\varphi} + \frac{y\cdot\cos(\alpha+\varphi)}{a\sin\varphi} + \frac{\gamma_1\sin(\alpha+\varphi)+\gamma_2\cos(\alpha+\varphi)}{a\sin\varphi},$$
$$x_2 = \frac{x\cdot\sin\alpha}{b\sin\varphi} - \frac{y\cdot\cos\alpha}{b\sin\varphi} + \frac{\gamma_1\cdot\sin\alpha+\gamma_2\cos\alpha}{b\sin\varphi}.$$

3. **Polarkoordinaten r, φ.**

(6)
$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi,$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}.$$

Es wird hier
$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2,$$
also
$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{12} = 0,$$
$$g^{11} = 1, \quad g^{22} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{12} = 0, \quad |g| = r^2,$$

(7)
$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}.$$

Von den Dreiindizes-Symbolen (s. S. 173) bestehen nur
$$\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = -r; \qquad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}21\\2\end{Bmatrix} = +\frac{1}{r}.$$

Die Gleichung der Geraden ist $r\sin(\varphi-\alpha) = p$. Ihr Abstand vom Nullpunkt ist p, ihre Richtung ist durch den Winkel α gegen die Achse $\varphi = 0$ gegeben.

Zwei Gerade sind parallel, wenn $\alpha_1 = \alpha_2$. Ihr Abstand ist $|p_1 - p_2|$.
„ „ „ senkrecht, „ $\alpha_1 = \pi - \alpha_2$.

Die Entfernung zweier Punkte $(\varphi_1 r_1)$, $(\varphi_2 r_2)$ ist
$$c = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}.$$

b) Räumliche Koordinaten-Systeme.

1. **Das Cartesische Koordinaten-System.**

(1)
$$g_{ik} = 1 \quad \text{für} \quad i = k$$
$$= 0 \quad „ \quad i \neq k.$$

Im übrigen vgl. S. 82.

Drehung eines *Cartesischen* Koordinatensystems um den endlichen Winkel δ um eine Achse, welche die Richtungen α, β, γ gegen X, Y, Z besitzt:

$$x' = x(1 - \sin^2\alpha(1 - \cos\delta)) + y(\cos\beta\cos\alpha(1 - \cos\delta) + \cos\gamma\sin\delta)$$
$$+ z(\cos\gamma\cos\alpha(1 - \cos\delta) - \cos\beta\sin\delta);$$
$$y' = x(\cos\alpha\cos\beta(1 - \cos\delta) - \cos\gamma\sin\delta) + y(1 - \sin^2\beta(1 - \cos\delta))$$
$$+ z(\cos\gamma\cos\beta(1 - \cos\delta) + \cos\alpha\sin\delta);$$
$$z' = x(\cos\alpha\cos\gamma(1 - \cos\delta) + \cos\beta\sin\delta) + y(\cos\beta\cos\gamma(1 - \cos\delta)$$
$$- \cos\alpha\sin\vartheta) + z(1 - \sin^2\gamma(1 - \cos\delta))$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Setzt man

$$\cos\alpha = \alpha_1, \quad \cos\beta = \alpha_2, \quad \cos\gamma = \alpha_3$$
$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3$$
$$x_i' = \sum_k a_{ik} x_k,$$

so ist also

$$a_{ik} = \delta_{ik}\cos\delta + \alpha_i\alpha_k(1 - \cos\delta) + \alpha_{ik}\sin\delta$$

wo z. B.

$$\alpha_{12} = \alpha_3 = -\alpha_{21}; \qquad \alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 0$$
$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1; \quad \delta_{12} = \delta_{13} = \ldots = 0.$$

Invariant bleibt hierbei

$$(3) \qquad \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 &= \sum_i \sum_k x_i x_k \delta_{ik} \\ x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma &= \sum_i x_i \alpha_i = p. \end{aligned}$$

p ist die Projektion von r auf die Achse (α, β, γ).

Für kleine δ wird

$$(4) \qquad \begin{aligned} x' &= x + y\delta\cdot\cos\gamma - z\delta\cdot\cos\beta \\ y' &= -x\delta\cos\gamma + y + z\delta\cdot\cos\alpha \\ z' &= x\delta\cos\beta - y\delta\cdot\cos\alpha + z. \end{aligned}$$

$$a_{ik} = \delta_{ik} + \alpha_{ik}\cdot\delta.$$

Zwischen den a_{ik} bestehen die „Orthogonalitätsbedingungen“:

$$(5) \qquad \begin{cases} \sum_i a_{ik}^2 = 1; & \sum_k a_{ik}^2 = 1 \\ \sum_i a_{ik} a_{il} = 0; & \sum_k a_{ik} a_{lk} = 0 \end{cases}$$

a_{ik} ist der Kosinus der Winkel zwischen der x_i und x_k'-Achsen ($|a_{ik}| \leq 1$). Die orthogonale Transformation $x_i' = \sum_k a_{ik} x_k$ ist also festgelegt durch

9 Größen a_{ik}, zwischen denen 6 unabhängige Beziehungen bestehen. Sie ist damit auch schon festgelegt durch die 3 Größen a_{11}, a_{22}, a_{33}. Aus diesen findet man den Drehwinkel δ durch

$$\cos\delta = \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1}{2} \tag{6}$$

und die Richtungswinkel α, β, γ der Drehachse durch

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \sqrt{\frac{a_{11} - \cos\delta}{1 - \cos\delta}} \\ \cos\beta &= \sqrt{\frac{a_{22} - \cos\delta}{1 - \cos\delta}} \\ \cos\gamma &= \sqrt{\frac{a_{33} - \cos\delta}{1 - \cos\delta}}. \end{aligned} \tag{7}$$

2. Räumlich schiefwinklige Koordinatensysteme (affine K.-S.).

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 + \delta_1, \\ y &= \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3 + \delta_2, \\ z &= \alpha_3 x_1 + \beta_3 x_2 + \gamma_3 x_3 + \delta_3. \end{aligned} \tag{8}$$

Schreibt man

$$\begin{aligned} a^2 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2, & ab\cos\gamma &= \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3, \\ b^2 &= \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2, & ac\cos\beta &= \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3, \\ c^2 &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2, & bc\cos\alpha &= \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3, \end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned} ds^2 = a^2 dx_1^2 + b^2 dx_2^2 + c^2 dx_3^2 + 2ab\cos\gamma\, dx_1\, dx_2 \\ + 2ac\cos\beta\, dx_1\, dx_3 + 2bc\cos\alpha\, dx_2\, dx_3, \end{aligned} \tag{9}$$

also

$$\begin{aligned} g_{11} &= a^2, & g_{12} &= ab\cos\gamma, \\ g_{22} &= b^2, & g_{13} &= ac\cos\beta, \\ g_{33} &= c^2, & g_{23} &= bc\cos\alpha, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} |g| &= a^2b^2c^2(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma \\ &\qquad + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) \\ &= a^2b^2c^2\cdot C = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{11} &= \frac{1}{a^2}\frac{\sin^2\alpha}{C}, & g^{12} &= \frac{1}{ab}\frac{(\cos\gamma - \cos\beta\cos\alpha)}{C}, \\ g^{22} &= \frac{1}{b^2}\frac{\sin^2\beta}{C}, & g^{13} &= \frac{1}{ac}\frac{(\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma)}{C}, \\ g^{33} &= \frac{1}{c^2}\frac{\sin^2\gamma}{C}, & g^{23} &= \frac{1}{bc}\frac{(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)}{C}, \end{aligned}$$

$$\Delta V = \frac{1}{C}\cdot\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{(\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta)}{ab}\frac{\partial^2 V}{\partial x_1\,\partial x_2} + \ldots\right). \tag{10}$$

3. Sphärische Polarkoordinaten.

$$x = r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$y = r \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi, \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},$$

$$z = r \cdot \cos\vartheta, \qquad \vartheta = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right).$$

Das Linienelement ds wird

(11) $$ds^2 = dr^2 + r^2 \cdot \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 + r^2 \cdot d\vartheta^2,$$

also

$$g_{11} = 1; \quad g_{22} = r^2 \sin^2\vartheta; \quad g_{33} = r^2;$$

$$g^{11} = 1; \quad g^{22} = \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}; \quad g^{33} = \frac{1}{r^2}; \quad |g| = r^4 \sin^2\vartheta.$$

(12) $$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta^2} + \frac{1}{r^2}\operatorname{ctg}\vartheta\cdot\frac{\partial V}{\partial\vartheta}.$$

Dreiindizes-Symbole:

$$\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = -r\sin^2\vartheta, \qquad \begin{Bmatrix}22\\3\end{Bmatrix} = -\sin\vartheta\cos\vartheta,$$

$$\begin{Bmatrix}33\\1\end{Bmatrix} = -r,$$

$$\begin{Bmatrix}21\\2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \frac{1}{r}, \qquad \begin{Bmatrix}31\\3\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix} = \frac{1}{r},$$

$$\begin{Bmatrix}32\\2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}23\\2\end{Bmatrix} = \operatorname{ctg}\vartheta.$$

4. Zylindrische Polarkoordinaten.

$$x = \varrho\cos\varphi, \qquad \varrho = \sqrt{x^2+y^2},$$

$$y = \varrho\sin\varphi, \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},$$

$$z = z, \qquad z = z.$$

(13) $$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = \varrho^2, \quad g_{33} = 1,$$

$$g^{11} = 1, \quad g^{22} = \frac{1}{\varrho^2}, \quad g^{33} = 1, \quad |g| = \varrho^2.$$

(14) $$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial V}{\partial\varrho} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}.$$

Dreiindizes-Symbole:

$$\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = -\varrho,$$

$$\begin{Bmatrix}21\\2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \frac{1}{\varrho}.$$

5. **Elliptische Koordinaten.**

Durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1 \tag{15}$$

ist eine Fläche 2. Grades mit den Hauptachsen $A = \sqrt{\lambda^2 - a^2}$, ... in Richtung der x, y, z-Achse definiert. a, b, c, λ sind reelle Parameter.

Ohne die Allgemeinheit wesentlich zu beschränken, kann der Parameter $a = 0$ gesetzt und die Bestimmung $c \geqq b \geqq 0$ getroffen werden.

Dann wird:

$$A^2 > B^2 > C^2,$$

$$A^2 = \lambda^2; \quad B^2 = \lambda^2 - b^2; \quad C^2 = \lambda^2 - c^2$$

bzw.

$$\lambda^2 = A^2; \quad b^2 = A^2 - B^2; \quad c^2 = A^2 - C^2.$$

Durch verschiedene Wahl von b, c und λ ergeben sich eine große Zahl verschiedener Flächen: erstens je nachdem, ob λ zwischen 0 und b, oder zwischen b und c, oder zwischen c und ∞ variiert; zweitens je nachdem die Werte b und c sich einander, oder ihren möglichen Grenzwerten 0 bzw. ∞ unbegrenzt annähern. Eine Übersicht über diese Fälle gibt die folgende Tabelle:

	$0 < \lambda < b$	$b < \lambda < c$	$c < \lambda < \infty$
$0 < b < c < \infty$	Zweischaliges Hyperboloid	Einschaliges Hyperboloid	Ellipsoid
$0 < b \sim c < \infty$	Zweischal. Rot.-Hyp. um x-Achse	Ebenenpaar durch x-Achse	Verlängertes Rot.-Ellipsoid um x-Achse
$0 \sim b < c < \infty$	Ebenenpaar durch z-Achse	Einschal. Rot.-Hyp. um z-Achse	Abgeflächtes Rot.-Ellipsoid um z-Achse
$0 \sim b \sim c < \infty$	Elliptischer Kegel um x-Achse	Elliptischer Kegel um z-Achse	Kugel
$0 < b < c \sim \infty$	Hyp. Zylinder ‖ z-Achse	Ellipt. Zylinder ‖ z-Achse	Ebenenpaar ⊥ z-Achse
$0 < b \sim c \sim \infty$	Ebenenpaar ‖ x-Achse	Hyp. Zylinder ‖ x-Achse	Ellipt. Zylinder ‖ x-Achse
$0 \sim b < c \sim \infty$	Ebenenpaar durch z-Achse	Kreiszylinder ‖ z-Achse	Ebenenpaar ⊥ z-Achse

Läßt man λ zwischen c und ∞ variieren, so erfüllen die Ellipsoide (bzw. ihre Entartungen) den ganzen Raum dicht; ebenso die bei Variation von λ zwischen b und c gebildeten einschaligen Hyperboloide; ebenso die bei Variation von λ zwischen 0 und b gebildeten zweischaligen Hyperboloide.

Die entstehenden 3 Flächenscharen sind zueinander orthogonal und konfokal.

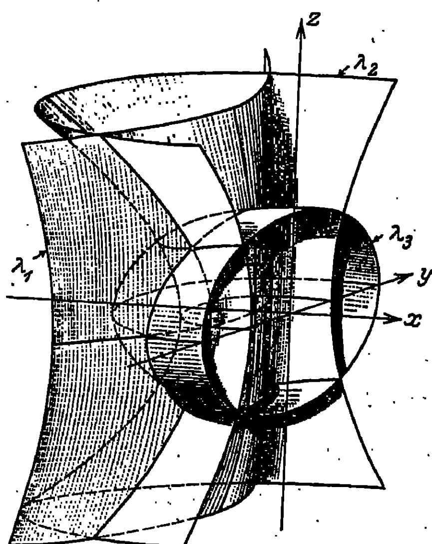


Fig. 20.

Setzt man

$$\lambda_3 > c > \lambda_2 > b > \lambda_1 > a,$$

so ist der Schnittpunkt der 3 Flächen $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$, $\lambda = \lambda_3$ durch diese Werte (8-deutig) bestimmt.

Die 3 Größen λ_1, λ_2, λ_3 heißen *elliptische Koordinaten* dieses Punktes. Seien x, y, z seine *Cartesischen* Koordinaten, dann ist

$$x^2 = \frac{(\lambda_1^2 - a^2)(\lambda_2^2 - a^2)(\lambda_3^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)},$$

$$y^2 = \frac{(\lambda_1^2 - b^2)(\lambda_2^2 - b^2)(\lambda_3^2 - b^2)}{(c^2 - b^2)(a^2 - b^2)},$$

$$z^2 = \frac{(\lambda_1^2 - c^2)(\lambda_2^2 - c^2)(\lambda_3^2 - c^2)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}.$$

(16) $$ds^2 = \frac{\lambda_1^2 d\lambda_1^2 D_2^2 D_3^2}{(\lambda_1^2 - a^2)(b^2 - \lambda_1^2)(c^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\lambda_2^2 d\lambda_2^2 D_1^2 D_3^2}{(\lambda_2^2 - a^2)(\lambda_2^2 - b^2)(c^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\lambda_3^2 d\lambda_3^2 D_1^2 D_2^2}{(\lambda_3^2 - a^2)(\lambda_3^2 - b^2)(\lambda_3^2 - c^2)},$$

wo $D_1^2 = \lambda_3^2 - \lambda_2^2$; $D_2^2 = \lambda_3^2 - \lambda_1^2$; $D_3^2 = \lambda_2^2 - \lambda_1^2$.

An Stelle von λ_1, λ_2, λ_3 führt man mit Vorteil folgende Funktionen von ihnen als Koordinaten ein (im Falle $a = 0$):

$$\alpha = \int_0^{\lambda_1} \frac{c \cdot d\lambda_1}{\sqrt{(b^2 - \lambda_1^2)(c^2 - \lambda_1^2)}}, \qquad \beta = \int_b^{\lambda_2} \frac{c \cdot d\lambda_2}{\sqrt{(\lambda_2^2 - b^2)(c^2 - \lambda_2^2)}},$$

$$\gamma = \int_c^{\lambda_3} \frac{c \cdot d\lambda_3}{\sqrt{(\lambda_3^2 - b^2)(\lambda_3^2 - c^2)}}.$$

(17) $$ds^2 = d\alpha^2 \cdot \frac{D_2^2 D_3^2}{c^2} + d\beta^2 \cdot \frac{D_3^2 D_1^2}{c^2} + d\gamma^2 \cdot \frac{D_1^2 D_2^2}{c^2}.$$

Der *Laplacesche* Operator $\varDelta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \ldots$ transformiert sich zu

(18) $$\varDelta V = \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{c^2}{D_2^2 D_3^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} \cdot \frac{c^2}{D_1^2 D_3^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \gamma^2} \cdot \frac{c^2}{D_1^2 D_2^2}.$$

α, β, γ sind als elliptische Integrale zu berechnen[1]). Man setzt[2])

$$\lambda_1 = b \sin\vartheta,$$
$$\lambda_2 = \sqrt{c^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi},$$
$$\lambda_3 = \frac{c}{\cos\psi},$$
$$k = \frac{b}{c},$$
$$k' = \sqrt{1-k^2},$$

dann ist

$$\alpha = \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}} = F(k, \vartheta),$$

(19)
$$\beta = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\cos^2\varphi}} = F(k') - F(k', \varphi),$$

$$\gamma = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\cos^2\psi}} = F(k) - F(k, \varphi).$$

Bei Rotationssymmetrie $b = 0$ bzw. $b = c$ benutzt man statt der allgemeinen elliptischen Koordinaten λ besser die spezielleren μ, ν, φ, bzw. σ, τ, φ.

I.
$$x = \alpha\sqrt{\mu^2+1}\sqrt{1-\nu^2}\cos\varphi \qquad r^2 = \alpha^2(\mu^2-\nu^2+1)$$
$$y = \alpha\sqrt{\mu^2+1}\sqrt{1-\nu^2}\sin\varphi$$
$$z = \alpha\mu\nu$$

$\mu = \text{const}$ ist ein abgeplattetes Rotationsellipsoid (Achsen $C = \alpha\mu$ und $A = B = \alpha\sqrt{\mu^2+1}$),

$\nu = \text{const}$ ist ein einschaliges Rotationshyperboloid.

$\varphi = \text{const}$ ist eine Ebene durch die z-Achse.

---

[1]) Jede lineare Funktion V von α, β, γ erfüllt die Gleichung $\Delta V = 0$. V wird dann auf einer Fläche zweiten Grades konstant.

[2]) Spezialfälle (vgl. oben).

1. $b = 0$: $k = 0$, $k' = 1$, $\alpha = \vartheta$,

$$\beta = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \ln(0) + \beta', \quad \text{wo } \beta' = \ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2},$$
$$\gamma = \psi.$$

Hier ist β' an Stelle von β brauchbar.

2. $b = c$: $k = 1$, $k' = 0$, $\alpha = \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{2}\right)$,

$$\beta = \varphi,$$
$$\gamma = \ln(0) + \gamma', \quad \text{wo } \gamma' = \ln\operatorname{ctg}\frac{\psi}{2}.$$

(20) $$ds^2 = d\mu \cdot \frac{\alpha^2(\mu^2+\nu^2)}{\mu^2+1} + d\nu^2 \frac{\alpha^2(\mu^2+\nu^2)}{1-\nu^2} + d\varphi^2 \cdot \alpha^2(\mu^2+1)(1-\nu^2)$$

(21) $$\Delta V = \left\{ \frac{\partial}{\partial\mu}\left((\mu^2+1)\frac{\partial V}{\partial \mu}\right) + \frac{\partial}{\partial \nu}\left((1-\nu^2)\frac{\partial V}{\partial \nu}\right) + \left(\frac{(\mu^2+1)(1-\nu^2)}{(\mu^2+\nu^2)}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right\} \frac{1}{\alpha^2(\mu^2+\nu^2)}.$$

II. $$x = \beta\sqrt{\sigma^2-1}\sqrt{1-\tau^2}\cos\varphi$$
$$y = \beta\sqrt{\sigma^2-1}\sqrt{1-\tau^2}\sin\varphi$$
$$z = \beta\cdot\sigma\tau.$$

Hier ist $\sigma = \text{const}$ ein verlängertes Rotationsellipsoid (Achsen $C = \beta\cdot\sigma$ und $A = B = \beta\sqrt{\sigma^2-1}$), d. h. man kommt von I auf II durch die Substitution:

$$\alpha = i\beta; \quad \mu = -i\sigma; \quad \nu = \tau; \quad \varphi = \varphi.$$

$\Delta V = 0$ wird erfüllt für I durch die speziellen partikulären Lösungen

$$V = \varphi$$
$$V = \ln\sqrt{\frac{1+\nu}{1-\nu}}$$
$$V = \operatorname{arc\,tg}\mu$$
$$V = \mu\nu$$
$$V = \mu\left(\nu\ln\sqrt{\frac{1+\nu}{1-\nu}} - 1\right)$$
$$V = \nu(\mu\operatorname{arc\,tg}\mu - 1)$$

und für II durch die mit obiger Substitution gefundenen Ausdrücke. Für $\mu^2 = \nu^2 = \sin\vartheta$, $\alpha = r$ erhält man gewöhnliche Polarkoordinaten r, ϑ, φ.

6. **Parabolische Koordinaten:** ξ, η, ψ.

Bei Rotationssymmetrie um die z-Achse setzt man

$$x = (\xi\eta)\cdot\cos\psi$$
$$y = (\xi\eta)\cdot\sin\psi$$
$$z = \tfrac{1}{2}(\xi^2-\eta^2); \quad r = \tfrac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)$$

(22) $$ds^2 = (\xi^2+\eta^2)(d\xi^2+d\eta^2) + \xi^2\eta^2 d\psi^2.$$

$\xi = \text{const}$ ist ein konfokales System von Rotationsparaboloiden um die z-Achse,

$\eta = \text{const}$ ist ein konfokales System von Rotationsparaboloiden um die z-Achse.

Beide Systeme sind zueinander orthogonal.

Der gemeinsame Brennpunkt liegt im Nullpunkt.

$$(23)\quad \Delta V = \left\{\eta \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi \frac{\partial V}{\partial \xi}\right) + \xi \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta \frac{\partial V}{\partial \eta}\right) + \left(\frac{\xi^2+\eta^2}{\xi \eta}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2}\right\} \frac{1}{\xi \eta (\xi^2+\eta^2)}.$$

C. Berührungstransformation (Kontakttransformation).

1. Im Zweidimensionalen.

a) Allgemeines. Durch eine Gleichung der Form:

$$(1)\qquad W(x, y, X, Y) = 0 \quad \text{(aequatio directrix)}$$

wird jedem Punkt der xy-Ebene eine Kurve in der XY-Ebene zugeordnet und umgekehrt, sowie einer Kurve $\varphi(x, y) = 0$ bzw. $x = x(t)$, $y = y(t)$ eine Kurvenschar: $F(X, Y, t) = 0$, deren Enveloppe als Abbild der Kurve $\varphi = 0$ aufgefaßt werden kann.

Der Name „Berührungstransformation" stammt daher, daß die Abbilder zweier sich berührender Kurven wieder zwei solche sind.

Die Gleichung des Abbildes der Kurve $\varphi = 0$ findet man durch Elimination von t aus den Gleichungen $F = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$, oder durch Elimination von x und y aus $W = 0$, $\varphi = 0$ und

$$\frac{\partial W}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Während sich hierbei die Punkte der xy-Ebene und der XY-Ebene nicht eindeutig entsprechen, tun dies die Punkte einer gegebenen Kurve $\varphi = 0$ und die ihres Abbildes (so daß man letztere mit dem gleichen Parameter t darstellen kann).

Schreibt man $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dY}{dX} = P$, so findet man aus den drei Gleichungen:

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial W}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial X} + P \cdot \frac{\partial W}{\partial Y} = 0,$$

die obige Transformation auch in der Form:

$$(2)\qquad X = X(x, y, p); \quad Y = Y(x, y, p); \quad P = P(x, y, p),$$

wobei der Ausdruck:

$$(3)\qquad \frac{\partial X}{\partial p}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial Y}{\partial y}\right) - \frac{\partial Y}{\partial p}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial X}{\partial y}\right) = 0$$

sein muß.

b) Ein einfaches Beispiel ist die *Legendresche Transformation*, definiert durch

$$(4)\qquad x X - y - Y = 0.$$

Sie liefert die einfachen Beziehungen:

(5) $$p = X, \quad P = x, \quad xp - y = Y, \quad XP - Y = y.$$

Sie findet Anwendung zur Umformung von Differentialgleichungen $f(x, y, p) = 0$ in eine evtl. leichter lösbare Form: $f(P, (XP - Y), X) = 0$, d. h. es wird hier der Differentialquotient zur unabhängigen Variablen X gemacht (vgl. S. 105).

c) Eine für die Mechanik wichtige Berührungs-Transformation ist die *kanonische Transformation*, definiert durch:

(6) $$z - Z = \Phi(q, Q),$$

wo Φ eine beliebige Funktion sei. Setzen wir

$$p = \frac{dz}{dq}; \quad P = \frac{dZ}{dQ},$$

so folgt:

(7) $$p\,dq - P\,dQ = d\Phi \quad \text{bzw.} \quad p = \frac{\partial \Phi}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial \Phi}{\partial Q}.$$

Diese Transformation heißt kanonisch, weil sie die sogenannten kanonischen Differentialgleichungen der Mechanik (vgl. S. 189 u. 192):

(8) $$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p}; \quad \dot{p} = \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q}$$

(wo der Parameter t die Zeit bedeutet und H die *Hamiltonsche* Funktion der Lagenkoordinate q und der Impulskoordinate p ist) in ein analoges System in Q und P überführt.

Zum Beweis bilde man die Variation der durch dt dividierten Gleichung (7)

$$p\dot{q} - P\dot{Q} - \dot{\Phi} = 0,$$

welche lautet

$$p\delta\dot{q} + \dot{q}\delta p - P\delta\dot{Q} - \dot{Q}\delta P - \delta\dot{\Phi} = 0.$$

Wegen

$$p\,\delta\dot{q} = \frac{d}{dt}(p\,\delta q) - \dot{p}\,\delta q$$

und

$$P\delta\dot{Q} = \frac{d}{dt}(P\,\delta Q) - \dot{P}\,\delta Q$$

sowie

$$\delta\dot{\Phi} = \frac{d}{dt}\,\delta\Phi$$

erhält man

$$\dot{q}\delta p - \dot{p}\,\delta q - \dot{Q}\,\delta P + \dot{P}\delta Q = 0.$$

Setzt man ferner

9) $$H(q, p) = K(Q, P) + C,$$

wo C eine beliebige Konstante ist, also

$$\frac{\partial H}{\partial q}\delta q + \frac{\partial H}{\partial p}\delta p - \frac{\partial K}{\partial Q}\delta Q - \frac{\partial K}{\partial P}\delta P = 0$$

und subtrahiert, so folgt wegen (8)

(8′) $$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P}; \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q},$$

also wieder ein kanonisches System in den neuen Variablen.

Äquivalent zu den Definitionsgleichungen (7) sind auch folgende:

(7′) $$\begin{cases} p\,dq + Q\,dP = d\,X(q, P) \\ q\,dp + P\,dQ = d\,\Psi(p, Q) \\ q\,dp - Q\,dP = d\,\Omega(p, P). \end{cases}$$

Die Transformation wird identisch:

$$p = P, \quad q = Q \quad \text{für} \quad X = q \cdot P \quad \text{oder} \quad \Psi = p \cdot Q.$$

Setzt man die Transformation an in der Form:

$$p = p(P, Q); \quad q = q(P, Q),$$

so folgt aus (7) bzw. (7′), daß

(10) $$\frac{\partial p}{\partial P} = \frac{\partial Q}{\partial q}, \quad \frac{\partial p}{\partial Q} = -\frac{\partial P}{\partial q}, \quad \frac{\partial q}{\partial Q} = \frac{\partial P}{\partial p}, \quad \frac{\partial q}{\partial P} = -\frac{\partial Q}{\partial p},$$

also auch

(10′) $$\frac{\partial p}{\partial P}\cdot\frac{\partial q}{\partial Q} - \frac{\partial p}{\partial Q}\cdot\frac{\partial q}{\partial P} = 1,$$

d. h. die Transformationsdeterminante $\frac{\partial(q, p)}{\partial(Q, P)}$ ist $= 1$, die Abbildung der pq-Ebene auf die PQ-Ebene ist flächentreu.

Eine infinitesimale kanonische Transformation ist gegeben durch

(11) $$Q = q + \lambda\frac{\partial F(q, p)}{\partial p}; \quad P = p - \lambda\cdot\frac{\partial F(q, p)}{\partial q},$$

wo λ eine sehr kleine Konstante sei.

Z. B. ist auch

$$Q = q + \dot{q}\,dt = q + \frac{\partial H(q, p)}{\partial p}\cdot dt$$

$$P = p + \dot{p}\,dt = p - \frac{\partial H}{\partial q}\cdot dt$$

eine kanonische Transformation und wegen des Gruppencharakters der Transformation auch

(12) $$q = q_0 + \int_{t_0}^{t}\dot{q}\,dt, \quad p = p_0 + \int_{t_0}^{t}\dot{p}\,dt$$

eine solche der q_0, p_0 in die q, p.

Es gilt daher

$$(13) \qquad p = \frac{\partial S(q_0, q)}{\partial q}; \qquad p_0 = -\frac{\partial S(q_0, q)}{\partial q_0}.$$

S heißt in der Mechanik „*Wirkungsfunktion*" (vgl. S. 193). Dort wird sie in der Regel definiert durch:

$$S = \int_{t_0}^{t} (p\dot{q} - H)\,dt = \int_{t_0}^{t} L\,dt.$$

$L = p\dot{q} - H$ heißt „*Lagrangresche Funktion*".

In der Tat findet man auch hieraus mit Benutzung von (8):

$$\delta S = p\,\delta q - p_0\,\delta q_0.$$

d) Von besonderem Interesse ist eine kanonische Transformation, welche $K(Q, P)$ nur von P abhängig macht, z. B. $K(P, Q) = \omega P$.

Dann wird

$$(14) \qquad \begin{cases} \dot{Q} = \dfrac{\partial K}{\partial P} = \omega. & Q = \omega t + \alpha, \\ \dot{P} = -\dfrac{\partial K}{\partial Q} = 0, & P = \beta, \end{cases}$$

wo ω, α, β Konstanten sind.

Man erhält hier also eine sehr einfache Lösung der transformierten *Hamiltonschen* Gleichung und somit durch Rücktransformation die Lösung der ursprünglichen.

Ein Beispiel hierfür ist das folgende:

Es sei

$$H(q, p) = \tfrac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) = K(Q, P) = \omega P;$$

gesucht ist $Q = Q(q, p)$.

Es ist

$$\frac{\partial X}{\partial q} = p = \omega\sqrt{\frac{2P}{\omega} - q^2}, \text{ also } X = \omega \int \sqrt{\frac{2P}{\omega} - q^2}\,dq + f(P),$$

mithin

$$Q = \frac{\partial X}{\partial P} = \arcsin\left(q \cdot \sqrt{\frac{\omega}{2P}}\right) + f'(P).$$

Setzt man z. B. $f(P) = -\frac{\pi}{2}$, so wird

$$\cos Q = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{p^2}{\omega^2 q^2}}}$$

oder

$$(15) \qquad \begin{cases} \operatorname{tg} Q = -\dfrac{p}{\omega q}; & P = \dfrac{p^2}{2\omega} + \dfrac{\omega q^2}{2} \\ \text{bzw.} & \\ q = \sqrt{\dfrac{2P}{\omega}} \cdot \cos Q; & p = -\sqrt{2P\omega}\,\sin Q. \end{cases}$$

Wenn, wie im vorliegenden Fall, Q eine reine (dimensionslose) Zahl bzw. ein Winkel ist, derart daß q und p als Funktionen von Q mit 2π periodisch sind, heißt Q eine *Winkelvariable.*

e) Eine Verallgemeinerung kann die Theorie noch in der Richtung erfahren, daß die kanonische Transformation von t selbst abhänge, d. h. daß die Formeln $p = p(P, Q, t)$, $q = q(Q, P, t)$ lauten, also t explizite enthalten.

Die einfachste Form ist hierfür:

$$p = P + At, \qquad q = Q + Bt, \tag{16}$$

wo A und B beliebige Konstante sind.

Diese Transformation ist kanonisch, wenn man setzt:

$$K(P, Q) = H(p, q) + (Aq - Bp). \tag{16'}$$

Sie liefert mit einer zeitunabhängigen Transformation auf neue Variable P', Q' kombiniert die allgemeinere:

$$p = P(P', Q') + At, \qquad q = Q(P', Q') + Bt \tag{17}$$

mit

$$K'(P', Q') = K(P, Q) = H(p, q) + (Aq - Bp). \tag{17'}$$

Man erhält so Transformationen auf bewegte Koordinatensysteme.

Dies kann man benutzen, wenn die Reduktion des vorigen Paragraphen nur bis zu einer Form $K(P, Q) = K_0(P) + K_1(P, Q)$ zu führen ist, wo K_1 klein gegen K_0 sei.

Dann hat man:

$$\dot{Q} = \frac{\partial K_0}{\partial P} + \frac{\partial K_1}{\partial P}; \qquad \dot{P} = -\frac{\partial K_1}{\partial Q}; \qquad P = \beta_0 - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial K_1}{\partial Q}\, dt.$$

Wenn nun $\int_{t_0}^{t} \frac{\partial K_1}{\partial Q}\, dt$ klein gegen β_0 ist, kann man durch die Transformation:

$$Q = \omega t + \alpha, \qquad P = \beta_0 + \beta \tag{18}$$

α und β als neue Variable einführen, die dann selbst als kleine Größen zu behandeln sind.

Das führt nach Obigem auf die Form:

$$K(P, Q) = \Omega(\alpha, \beta) - \omega(\beta_0 + \beta)$$

und

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta}; \qquad \dot{\beta} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}.$$

Die Größen α und β sind also wieder kanonische Variable mit der *Hamiltonschen* Funktion Ω.

Ω heißt „*Störungsfunktion*".
Die Methode heißt die der „*Variation der Konstanten*".

2. Im Mehrdimensionalen.

Hier lautet die aequatio directrix:

$$W(x_1\, x_2 \ldots x_n\, X_1\, X_2 \ldots X_n) = 0. \tag{19}$$

Die *Legendresche* Transformation im Dreidimensionalen ist gegeben durch:

$$x\,X + y\,Y - z - Z = 0. \tag{20}$$

Hieraus folgt, wenn man z bzw. Z als von x, y bzw. X, Y abhängige Variablen auffaßt:

$$X = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial z}{\partial y}; \quad x = \frac{\partial Z}{\partial X}, \quad y = \frac{\partial Z}{\partial Y} \text{ usw.} \tag{20'}$$

$$dz = X\,dx + Y\,dy; \quad dZ = x\,dX + y\,dY.$$

Die *kanonische Transformation* kann ohne Schwierigkeiten auf mehr Dimensionen verallgemeinert werden; (7) geht über in:

$$\sum_i p_i\,dq_i - \sum_i P_i\,dQ_i = d\,\Phi(q_1\,q_2 \ldots q_n, Q_1\,Q_2 \ldots Q_n), \text{ wo } i = 1, 2 \ldots n, \tag{21}$$

also

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}; \qquad P_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial Q_i}. \tag{22}$$

Bis auf die zu setzenden Summenzeichen bleibt alles ungeändert; Gleichung (10) und (10') sind in folgender Weise zu erweitern:

$$\frac{\partial p_i}{\partial P_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial q_i}; \qquad \frac{\partial p_i}{\partial Q_k} = -\frac{\partial P_k}{\partial q_i}; \qquad \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} = \frac{\partial P_k}{\partial p_i}; \qquad \frac{\partial q_i}{\partial P_k} = -\frac{\partial Q_k}{\partial p_i}. \tag{23}$$

Daher wird

$$\sum_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial P_k}\cdot\frac{\partial q_i}{\partial x} - \frac{\partial p_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial q_i}{\partial P_k}\right) = \sum_i \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial q_i}{\partial x} + \frac{\partial Q_k}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial p_i}{\partial x}\right) = \frac{\partial Q_k}{\partial x} \tag{24}$$

$= 1$ für $x = Q_k$ und sonst $= 0$, wenn man für x andere P oder Q außer Q_k einsetzt.

Der Ausdruck

$$(x, y) = \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial p_i}{\partial y} - \frac{\partial p_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial q_i}{\partial y}\right)$$

heißt „*Lagrangesche Klammer*".

Es ist also nur

$$(Q_k, P_j) = -(P_j, Q_k) = 1 \quad \text{für} \quad k = j \quad \text{und} \quad = 0 \text{ für } k \neq j \tag{25}$$

sowie

$$(Q_k, Q_j) = (P_k, P_j) = 0.$$

Ein Beispiel für eine Transformation im Dreidimensionalen, die (im Sinne der Transformation von S. 94) H auf eine einfachere Form bringt, ist die folgende:

Es sei (Planetenbewegung eines Elektrons um einen Kern):

$$(26)\qquad H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\vartheta}\right) - \frac{eE}{r}.$$

Man gelangt durch die Berührungstransformation:

$$X_1 = p_1 r + p_3 \varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\vartheta} d\vartheta \sqrt{p_2^2 - \frac{p_3^2}{\sin^2\vartheta}}; \qquad q_i = \frac{\partial X_1}{\partial p_i}, \qquad p_r = \frac{\partial X_1}{\partial r} \text{ usw.}$$

zu der Form:

$$(27)\qquad H = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2}\right) - \frac{eE}{q_1}.$$

Eine nochmalige Transformation:

$$X_2 = \int_{q_0}^{q_1} dq_1 \sqrt{-\frac{m^2 e^2 E^2}{P_1^2} + \frac{2meE}{q_1} - \frac{P_2^2}{q_1^2}} + P_2 q_2 + P_3 q_3;$$

$$p_i = \frac{\partial X_2}{\partial q_i}; \qquad Q_i = \frac{\partial X_2}{\partial P_i}$$

führt weiter zu:

$$H = K(P, Q) = -\frac{m e^2 E^2}{2 P_1^2}.$$

Die Bedeutung der neuen Variablen ist:

$q_1 = r$ (Radiusvektor),
$q_2 =$ Länge des Planeten vom aufsteigenden Knoten, gemessen in der Bahnebene,
$q_3 =$ Länge des aufsteigenden Knotens, gemessen im Äquator $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.
$p_1 = m\dot{r}$,
$p_2 =$ gesamtes Impulsmoment,
$p_3 =$ Impulsmoment in Richtung $\varphi = p_\varphi = m r^2 \dot{\varphi}$

sowie:

$Q_1 =$ mittlere Anomalie,
$Q_2 =$ Länge des Perihels $q = q_0$ vom aufsteigenden Knoten ab,
$Q_3 = q_3$ (s. oben).
$P_1 = \sqrt{meEa}$, wo a die halbe große Achse der Bahn ist.
$P_2 = p_2 = \sqrt{meEa(1 - \varepsilon^2)}$, wo ε die Exzentrizität der Bahn ist,
$P_3 = p_3 = P_2 \cos i$, wo i die Neigung der Bahn gegen den Äquator ist.

(Die halbe kleine Achse b wird gleich $\frac{P_1 P_2}{meE}$).

In dieser Form ist Q_1 eine Winkelvariable. (Es ist dies durch die Form des Gliedes mit P_1 in dem Ausdruck für X_1 erreicht worden.) Die übrigen Q und P werden Konstanten.

Literatur:

Böcher: s. S. 12. — Lehrbücher der analytischen Geometrie. — S. a. Enzyklopädie d. math. Wissensch. Bd. III. — *Serret-Scheffers:* s. S. 24: Bd. III u. a.

Sechster Abschnitt.

Differentialgleichungen.

A. Allgemeines über Differentialgleichungen.

1. Einteilung der Differentialgleichungen.

Eine Gleichung heißt eine Differentialgleichung, wenn sie neben einer oder mehreren unabhängigen oder abhängigen Variablen Differentialquotienten der letzteren nach der bzw. den ersteren enthält.

Man unterscheidet *partielle* und *gewöhnliche* Differentialgleichungen, je nachdem, ob die Gleichung partielle Differentialquotienten enthält oder nicht.

Gewöhnliche Differentialgleichungen enthalten daher nur *eine* unabhängige Variable, partielle dagegen zwei oder mehr.

Man klassifiziert die Differentialgleichungen

1. nach der *Ordnung* n ihres höchsten Differentialquotienten

$$\frac{d^n y}{d x^n} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^n} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^a \partial y^{n-a}} \quad \text{usw.};$$

2. gelegentlich nach dem *Grade* p der höchsten Potenz der in ihr enthaltenen Differentialquotienten, z. B.

$$\left(\frac{d y}{d x}\right)^p,$$

wenn die Gleichung rational in y und seinen Ableitungen ist.

Im besonderen heißt eine Differentialgleichung *linear*, wenn die abhängigen Variablen und ihre Ableitungen nur in der ersten Potenz und nicht miteinander multipliziert auftreten.

Ferner spricht man von *homogenen* Differentialgleichungen. Diese Bezeichnung wird in verschiedenem Sinne gebraucht.

1. Eine Differentialgleichung $F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots\right) = 0$ wird *homogen* genannt, wenn F eine ganze rationale homogene Funktion von $y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{d x^n}$ ist. So ist z. B.

$$X_1 \frac{dy}{dx} + X_2 \frac{d^2 y}{d x^2} + \cdots + X_0\, y = 0$$

eine *homogene lineare* Differentialgleichung. Die $X_1 \ldots X_n$ sind beliebige Funktionen von x.

2. Eine Differentialgleichung 1. Ordnung $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ heißt vielfach auch *homogen*, wenn $f(x, y)$ eine Funktion von $\frac{y}{x}$ allein ist, sich also in der Form schreiben läßt:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

In diesem Sinne ist z. B. homogen die Gleichung:

$$M\frac{dy}{dx} = N,$$

in der $M(x, y)$ und $N(x, y)$ homogene Funktionen von x und y desselben Grades sind.

3. Als *„eindimensional“* wird eine (auch zuweilen „homogen“ genannte) Gattung von Differentialgleichungen folgender Art bezeichnet.

Man betrachtet y als Größe von n Dimensionen, wo n willkürlich ist. x habe die Dimension 1, $\frac{dy}{dx}$ die Dimension $n-1$, usw. Haben dann sämtliche Glieder der Gleichung im angegebenen Sinne die gleiche Dimension, so heißt sie *„eindimensional“*. Z. B.

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_n y = V,$$

wo $V = f(x)$ oder konstant ist und die A_i Konstanten bedeuten.

2. Lösungen von Differentialgleichungen.

Als *Lösung* einer Differentialgleichung bezeichnet man eine Funktion der unabhängigen Variablen, welche für die abhängige Variable (y) in die Gleichung eingesetzt, diese identisch in den unabhängigen Variablen erfüllt.

Als *Integral* bezeichnet man eine Funktion der unabhängigen und abhängigen Variablen, sowie evtl. willkürlicher Konstanten, welche gleich einer willkürlichen Konstanten gesetzt, bei jedem Wert dieser Konstanten eine Gleichung liefert, die von Lösungen der Differentialgleichung befriedigt wird.

Intermediäres Integral einer Differentialgleichung n-ter Ordnung heißt eine Funktion der unabhängigen und abhängigen Variablen und Konstanten, sowie deren Ableitungen bis höchstens zur $(n-1)$-ten Ordnung, welche gleich einer Konstanten gesetzt, eine Differentialgleichung niederer Ordnung liefert, die von Lösungen der ursprünglichen befriedigt wird.

a) Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Die *vollständige Lösung* (auch *allgemeine* Lösung oder *Stammgleichung* genannt) einer gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung enthält n willkürliche Konstanten. Indem man diesen Konstanten spezielle Werte beilegt, erhält man *partikuläre* Lösungen.

Außerdem kann eine Differentialgleichung 1. Ordnung, falls sie nicht linear ist, Lösungen haben, die sich nicht durch spezielle Wahl der Konstanten der vollständigen Lösung zu ergeben brauchen. Diese Lösungen heißen *singuläre Lösungen.*

Existiert eine singuläre Lösung der Differentialgleichung $\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, so muß sie gleichzeitig folgende Bedingungen erfüllen:

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

wo $p = \frac{dy}{dx}$ bedeutet.

Geometrische Deutung der Lösung.

Eine partikuläre Lösung einer Differentialgleichung zwischen einer abhängigen y und einer unabhängigen Variablen x repräsentiert eine Kurve in der x, y-Ebene. Die vollständige Lösung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung repräsentiert eine von n Parametern abhängige Kurvenschar. Hat für $n = 1$ diese Kurvenschar eine *Enveloppe,* so ist deren Gleichung eine *singuläre Lösung.*

Die einzelne Kurve (partikuläre Lösung) ist festgelegt durch n Bedingungen, die zur Bestimmung der n Parameter dienen können Anfangs- oder Randbedingungen).

b) Partielle Differentialgleichungen.

Die *allgemeine Lösung* (Integral) einer partiellen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit p unabhängigen Variablen ist eine Lösung, welche n willkürliche *Funktionen* von $p - 1$ Variablen enthält. Diese können gewisse der *unabhängigen* Variablen oder auch Kombinationen von ihnen sein.

Bei Differentialgleichungen *1. Ordnung* spielt daneben der Begriff der *vollständigen* Lösung eine Rolle. Als solche bezeichnet man eine Lösung in Form einer Funktion der unabhängigen Variablen, welche p willkürliche *Konstanten* enthält.

Aus einer vollständigen Lösung erhält man die *allgemeine* Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung wie folgt: Es sei $\varphi(x_1 x_2 \ldots x_p,\ a_1 a_2 \ldots a_p)$ eine vollständige Lösung (wo die a_i willkürliche Konstante seien). Aus dieser p-fachen Schar von Funktionen, greift man eine $(p-1)$ fache heraus, indem man z. B. $a_p = \vartheta(a_1 a_2 \ldots a_{p-1})$ setzt und berechnet hieraus und aus den Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_p} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial a_i} = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots p - 1),$$

die a_i als Funktionen der x_i und setzt diese Ausdrücke in φ ein. Dann entsteht eine Funktion, welche die Differentialgleichung befriedigt und von der willkürlichen Funktion ϑ von $p-1$ Variablen abhängt, also die allgemeine Lösung.

Um die *singuläre* Lösung aus der vollständigen zu erhalten, berechne man aus den Gleichungen $\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = 0$ die Größen a_i als Funktionen der x_i und setze in φ ein. Wenn die so entstehende Funktion Lösung der Differentialgleichung ist, so ist sie die singuläre Lösung.

Geometrische Deutung der Lösung.

Sind nur zwei unabhängige (x und y) und eine abhängige (z) Variable vorhanden, so können den Lösungen im xyz-Raum geometrische Deutungen gegeben werden.

1. Das *vollständige Integral* repräsentiert ein zweifach unendliches Flächensystem von der Form:

$$\varphi(x, y, z, a, b) = 0$$

mit den beiden willkürlichen Parametern a und b.

2. Dadurch, daß man den einen Parameter zu einer willkürlichen Funktion des anderen macht und aus den drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x, y, z, a, b) &= 0 \\ b &= \vartheta(a) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\,\vartheta'(a) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

a eliminiert, also aus dem vollständigen Integral das *allgemeine Integral* ableitet, wählt man aus den zwei Flächen *eine* Flächenschar aus und bestimmt deren Enveloppe.

Es bedeutet dann das allgemeine Integral die Enveloppe dieser Flächenschar.

3. Das *singuläre Integral* bedeutet die gemeinsame Enveloppe aller in dem vollständigen Integral enthaltenen Flächen.

B. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

1. Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Die Differentialgleichung 1. Ordnung hat die allgemeine Form

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Sie ist durch Quadratur lösbar:

a) wenn sie sich schreiben läßt in der Form:

$$f_1(y) \cdot dy = f_2(x) \cdot dx. \qquad \text{(Separation der Variabeln.)}$$

Lösung: $\int f_1(y)\,dy = \int f_2(x)\,dx + C$ [1].

b) wenn sie linear ist:

$$\frac{dy}{dx} + y \cdot f_1(x) + f_2(x) = 0.$$

Lösung: $y = C e^{-\int f_1(x)\,dx} - e^{-\int f_1(x)\,dx} \int f_2(x)\, e^{\int f_1(x)\,dx}\, dx.$

c) wenn sie homogen ist (vgl. S. 99):

1. Die Gleichung habe die Form:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Man setzt $y = vx$, wodurch v und x (statt y und x) als neue Veränderliche eingeführt werden. Dann ist:

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx},$$

und es wird

$$\ln x + \int \frac{dv}{v - f(v)} = C.$$

2. Die Gleichung habe die Form:

$$F\left(\frac{y}{x}, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Man löst auf nach $\frac{dy}{dx}$ und erhält $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$, also Fall 1, *oder* man löst nach $\frac{y}{x}$ auf und erhält

$$\frac{y}{x} = f\left(\frac{dy}{dx}\right) = f(p),$$

also:

$$\ln x = C + \int \frac{f'(p)\,dp}{p - f(p)},$$

dann folgt die Lösung durch Elimination von p aus den beiden Gleichungen.

3. Die Gleichung $F\left(\frac{y}{x}, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ läßt sich auch lösen, indem man eine Hilfsvariable u einführt:

$$\frac{y}{x} = f(u); \quad \frac{dy}{dx} = g(u).$$

Es ergibt sich $\ln x = C + \int \frac{f'(u)}{g(u) - f(u)}\, du.$

[1]) Die Integrale sind, wenn keine Grenzen angegeben sind, rein formal zu bilden, z. B. $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$, d. h. als oberste Grenze ist die Variable selbst zu nehmen, die untere Grenze ist willkürlich.

d) wenn die unabhängige Variable fehlt:

$$\psi\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

1. Ist die Gleichung nach $\frac{dy}{dx}$ auflösbar

$$\frac{dy}{dx} = f(y),$$

so ist:

$$\int \frac{dy}{f(y)} = x + C.$$

2. Ist die Gleichung nach y auflösbar

$$y = f\left(\frac{dy}{dx}\right) = f(p),$$

so ist:

$$x = \int \frac{f'(p)\,dp}{p} + C.$$

Dann erhält man die Lösung $y(x)$ durch Elimination von p aus den beiden hingeschriebenen Gleichungen.

3. y und $\frac{dy}{dx} = p$ werden durch Hilfsvariable ausgedrückt

$$y = f(u), \qquad p = g(u),$$

dann ist:

$$x = C + \int \frac{f'(u)}{g(u)}\,du.$$

e) wenn die abhängige Variable nicht explizit vorkommt:

$$\varphi\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

1. Man formt um in $\Phi\left(x, \frac{dx}{dy}\right) = 0$ und verfährt wie bei d).

2. Man löst auf nach $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = F(x),$$

dann ist:

$$y = \int F(x)\,dx + C.$$

3. Man drückt x durch $\frac{dy}{dx}$ aus

$$x = F\left(\frac{dy}{dx}\right) = F(p).$$

Durch Differentiation nach y folgt

$$\frac{1}{p} = F'(p)\frac{dp}{dy}$$

$$y = \int p\,F'(p)\,dp + C.$$

Durch Elimination von p erfolgt die Lösung.

f) $y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right)$ *Clairautsche Differentialgleichung.* Differentiation nach x ergibt, wenn $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt wird:

$$p = p + [x + f'(p)]\frac{dp}{dx}.$$

Es ist also entweder: 1. $\frac{dp}{dx} = 0$. Dann erhält man als *erste Lösung*

$$y = Cx + f(C), \quad \text{wo } C = p = \text{const}$$

oder 2. $x + f'(p) = 0$. Wird p aus dieser Gleichung und $y = px + f(p)$ eliminiert, so ergibt sich eine zweite (singuläre) Lösung. (Enveloppe zur ersten Lösung.)

g) Häufig führt die *Legendresche* oder duale *Transformation* zum Ziel. Man führt eine neue abhängige Veränderliche Y ein:

$$Y = px - y = \frac{dy}{dx}x - y, \quad \text{also} \quad dY = p\,dx + x\,dp - dy = x\,dp.$$

Ferner führt man p als neue unabhängige Veränderliche ein:

$$X = p = \frac{dy}{dx},$$

dann wird

$$x = \frac{dY}{dp} = \frac{dY}{dX} = P,$$

dann kann man die Gleichung $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ überführen in die Form

$$F(P, PX - Y, X) = 0.$$

Ist das Integral dieser Gleichung bekannt, so kann das der ursprünglichen durch eine algebraische Elimination gefunden werden. Ist z. B. ein Integral der neuen Gleichung:

$$f(X, Y) = 0,$$

dann gilt

$$0 = \frac{df}{dX} = \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{dY}{dX} = \frac{\partial f}{\partial X} + x\frac{\partial f}{\partial Y}$$

und

$$-y\frac{\partial f}{\partial Y} = (Y - px)\frac{\partial f}{\partial Y} = Y\frac{\partial f}{\partial Y} + X\frac{\partial f}{\partial X}.$$

Elimination von X und Y aus diesen drei Gleichungen ergibt ein Integral (Gleichung zwischen x und y).

h) *Riccatische* Differentialgleichung.

1. Form: $a\frac{dy}{dx} + by^2 = cx^m$,

2. Form: $x\frac{dy}{dx} - ay + by^2 = cx^n$.

Führt man eine neue Unabhängige z ein durch $z = x^a$ und eine neue Abhängige u durch $y = uz$, so folgt aus der 2. Form:

$$a\frac{du}{dz} + bu^2 = cz^{\frac{n}{a}-2},$$

d. i. die 1. Form.

Da diese Differentialgleichung für $n = 2a$ den Fall b) (S. 103) repräsentiert, ist durch ihre Vermittlung die 2. Form in *endlicher* Form integrierbar im

Fall 1 für $n = 2a$ (bzw. die 1. Form ist in endlicher Form integrierbar für $m = 0$).

Die 2. Form ist ferner integrierbar im

Fall 2, wenn $\frac{n-2a}{2n}$ eine positive ganze Zahl ist (bzw. für die 1. Form, wenn $m = -\frac{4i}{2i \pm 1}$, wo $i = 0$ oder eine positive ganze Zahl ist). Denn die Transformationen:

$$y = \frac{a}{b} + \frac{x^n}{y_1}; \quad y_1 = \frac{a+n}{c} + \frac{x^n}{y_2}, \quad y_2 = \frac{a+2n}{c} + \frac{x^n}{y_3}, \text{ usw.}$$

in die Form 2 eingesetzt führen diese über in Gleichungen der Form:

$$x\frac{dy_i}{dx} - (a + in)y_i + by_i^2 = cx^n \text{ (falls } i \text{ gerade ist)}$$

bzw. $x\frac{dy_i}{dx} - (a + in)y_i + cy_i^2 = bx^n$ (falls i ungerade ist), welche für $n = 2(a + in)$, d. h. wenn $\frac{n-2a}{2n} = i$ gleich einer positiven ganzen Zahl ist, in den Fall 1 übergehen.

Fall 3, wenn $\frac{n+2a}{2n}$ eine positive ganze Zahl ist. Denn die Transformationen

$$y = \frac{x^n}{y_1}; \quad y_1 = \frac{n-a}{c} + \frac{x^n}{y_2}; \quad y_2 = \frac{2n-a}{c} + \frac{x^n}{y_3}; \text{ usw.}$$

führen dann auf den 1. Fall.

i) Die in h) behandelte *Riccatische* Differentialgleichung ist ein Sonderfall der Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = P + Qy + Ry^2 \quad \text{(allgemeine *Riccatische* D.G.),}$$

wo P, Q, R Funktionen von x sind.

Ist *ein partikuläres* Integral $y_1 = f_1(x)$ bekannt, so kann das vollständige durch Integrationen erhalten werden. Man setzt

$$y = y_1 + \frac{1}{v}$$

und erhält

$$\frac{dv}{dx} + (Q + 2Ry_1)v = -R \quad \text{(Lösung vgl. b) S. 103).}$$

Ist noch ein zweites partikuläres Integral bekannt, so kann das vollständige Integral durch eine einzige Integration erhalten werden. Man setzt

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{v_1}, \quad v = v_1 w$$

$$y = y_1 + \frac{1}{v_1 w}$$

und erhält:

$$w = 1 + C \cdot e^{\int \frac{R}{v_1} dx}.$$

Ist noch ein drittes partikuläres Integral y_3 bekannt, so kann das vollständige Integral ohne Integration gefunden werden. Man erhält als vollständiges Integral

$$\frac{(y - y_1)(y_3 - y_2)}{(y - y_2)(y_3 - y_1)} = C.$$

2. Lineare Differentialgleichungen.

Allgemeines.

Die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung hat die allgemeine Form:

(1) $$X_0 \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + X_n y = \Phi(D)\, y = V\ ^{1)},$$

wo die X und V Funktionen von x allein sind[2]).

---

[1]) Die symbolische Schreibweise $\Phi(D)\,y$ bedeutet folgendes: Schreibt man:

$$\frac{dy}{dx} = Dy \qquad \frac{d^2 y}{d^2 x} = D^2 y$$

$$\int y\, dx = D^{-1} y \quad \text{usw.}$$

so ist $\Phi(D)\,y$ als Polynom in D aufzufassen

$$= (X_0 D^n + X_1 D^{n-1} + \ldots + X_{n-1} \cdot D + X_n)\, y.$$

Der Wert dieser Schreibweise liegt darin, daß man diesen Ausdruck unter Umständen wie einen algebraischen behandeln darf (vgl. S. 109). Als Beispiel für die Schreibweise sei die *Taylorsche* Formel symbolisch hingeschrieben:

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot \frac{df(x)}{dx} + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \ldots$$

$$= \left(1 + hD + \frac{h^2 D^2}{2!} + \ldots\right) f(x)$$

$$= e^{hD} f(x).$$

[2]) Der Differentialausdruck:

$$\frac{d^n (X_0 y)}{dx^n} - \frac{d^{n-1}(X_1 y)}{dx^{n-1}} + - \ldots + (-1)^n X_n y$$

heißt der zu $\Phi(D)\,y$ „*adjungierte*“ Differentialausdruck. Ist er identisch mit $\Phi(D)\,y$, so heißt $\Phi(D)\,y$ „*sich selbst adjungiert*“.

Folgende Eigenschaften sind allen linearen Differentialgleichungen gemeinsam.

1. Ist y_1 eine beliebige partikuläre Lösung der Gleichung $\Phi(D)y = V$ und setzt man $y = y_1 + Y$, so folgt:

(2) $$\Phi(D)Y + \Phi(D)y_1 = V$$

und

(3) $$\Phi(D)Y = 0.$$

Die vollständige Lösung der homogenen Gleichung (3) zu y_1 hinzugefügt ergibt die vollständige Lösung der inhomogenen Gleichung (1).

2. Ist Y_1 eine Lösung der Gleichung $\Phi(D)Y = 0$, so ist auch $Y = C_1 Y_1$ eine Lösung.

Sind $Y_1, Y_2 \ldots Y_n$ Lösungen der homogenen Gleichung, so ist auch jede lineare Kombination derselben eine Lösung. Die vollständige Lösung ergibt sich als lineare Kombination von n *unabhängigen* Lösungen.

3. Ist Y_1 eine Lösung von $\Phi(D)Y = 0$ und substituiert man den Ansatz $y = Y_1 z$ in die Gleichung $Y(D)y = V$, so erhält man für z eine Differentialgleichung, deren Ordnung um eine Einheit niedriger ist als die der ursprünglichen Differentialgleichung.

a) Allgemeine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

(4) $$\Phi(D)y = \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_n y = Y(x) \quad \text{(inhom. Gl.)}$$

(4a) $$\text{bzw.} = 0 \quad \text{(homog. Gl.)}$$

Man bildet die „charakteristische Gleichung“:

(5) $$a^n + A_1 a^{n-1} + A_2 a^{n-2} + \ldots + A_n = 0 = \Phi(a)$$

und löst dieselbe nach a auf. Sind ihre n Wurzeln gleich $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, und stimmen keine zwei dieser Zahlen überein, so ist (wenn $A, B, \ldots$ beliebige Konstanten bedeuten):

(6) $$y_0 = A e^{\alpha x} + B e^{\beta x} + \ldots$$

die allgemeine Lösung der *homogenen* Gleichung $\Phi(D)y = 0$.

Sind aber zwei Wurzeln, z. B. α und β, gleich, dann heißt die allgemeine Lösung der *homogenen* Gleichung:

(7) $$y_0 = (A' + B'x)e^{\alpha x} + C e^{\gamma x} + \ldots$$

Sind r Wurzeln gleich α. Dann heißt die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:

(8) $$y_0 = (A' + B'x + C'x^2 + \ldots + R'x^{r-1})e^{\alpha x} + \ldots$$

Ist nun $f_0(x)$ ein beliebiges *partikuläres* Integral der inhomogenen Gleichung $\Phi(D)y = V$, so ist ihre vollständige Lösung (vgl. oben):

(9) $$y = f_0(x) + y_0.$$

Verschiedene Fälle, in denen die Bestimmung eines partikulären Integrals $f_0(x)$ leicht möglich ist.

1. Ist V eine ganze rationale Funktion von x in der Diffgl.

$$\Phi(D)\,y = V,$$

so erhält man $f_0(x)$ in folgender symbolischer Form:

$$f_0(x) = \frac{1}{\Phi(D)}\,V. \tag{10}$$

Das bedeutet: Den Ausdruck

$$\frac{1}{\Phi(D)} = \frac{1}{\left(\frac{d^n}{dx^n} + A_1\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + A_n\right)} = \frac{1}{(D^n + A_1\,D^{n-1} + \ldots + A_n)}$$

entwickele man nach steigenden Potenzen von D, als sei dieses Operationszeichen eine algebraische Größe. Ist hierbei die niedrigste wirklich auftretende Potenz von D die k-te und die höchste Potenz von x in V die m-te, so beginnt die Entwicklung von $\frac{1}{\Phi(D)}$ mit $\frac{1}{D^k}$ und braucht nicht über D^m hinausgeführt zu werden, weil alle höheren Differentialquotienten als $D^m\,V$ verschwinden.

2. Ist V eine Exponentialfunktion von x (oder enthält eine Exponentialfunktion als Faktor)

$$V = e^{ax}\,X,$$

wo X ganz und rational sei, so wird die gesuchte partikuläre Lösung

$$f_0(x) = \frac{1}{\Phi(D)}\,V = \frac{1}{\Phi(D)}\,e^{ax}\,X = e^{ax}\,\frac{1}{\Phi(D+a)}\,X.$$

3. V enthält einen Sinus oder Kosinus als Faktor.

$$V = X\cos(mx + \alpha)$$

$$y = \frac{1}{\Phi(D)}\,X\cos(mx + \alpha).$$

Setzt man

$$y_1 = \frac{1}{\Phi(D)}\,X\sin(mx + \alpha),$$

so wird

$$y + i\,y_1 = \frac{1}{\Phi(D)}\,X\,e^{i(mx+\alpha)} = e^{i(mx+\alpha)}\,\frac{1}{\Phi(D + i\,m)}\,X,$$

so daß nur noch der Ausdruck

$$\frac{1}{\Phi(D + i\,m)}\,X$$

zu berechnen ist.

4. V enthält eine Potenz von x als Faktor.

$$V = x^m X$$

$$y = \frac{1}{\Phi(D)} x^m X = x^m \frac{1}{\Phi(D)} X + m x^{m-1} \left(\frac{d}{dD} \frac{1}{\Phi(D)}\right) X$$
$$+ \frac{m(m-1)}{2!} x^{m-2} \left(\frac{d^2}{dD^2} \frac{1}{\Phi(D)}\right) X + \dots$$

Die Entwicklung wird bis zum $(m+1)$-ten Gliede fortgesetzt.

5. Ein besonderer Fall einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist die Gleichung

(11) $$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x).$$

n aufeinanderfolgende Integrationen ergeben als allgemeine Lösung:

(12) $$y = \int \dots \int f(x)(dx)^n + B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} + \dots + B_{n-1} x + B_n,$$

wo die B_r beliebige Konstanten sind. Diese Lösung lautet einfacher:

(13) $$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f(t)(x-t)^{n-1} dt + B_1 x^{n-1} + \dots + B_n.$$

b) Allgemeine lineare Differentialgleichung mit veränderlichen Koeffizienten.

(14) $$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + X_{n-1} \frac{dy}{dx} + X_n y = V(x) \text{ (inhom. Gl.)},$$

(14a) $$\text{bzw.} = 0 \quad \text{(homog. Gl.)}.$$

$X_1, \dots, X_n$ und V sind Funktionen von x allein.

Sind $y_1, y_2, \dots, y_n$ partikuläre Lösungen von $\Phi(D) y = 0$, so ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

(15) $$y = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n,$$

wenn die Lösungen $y_1, y_2, \dots, y_n$ *linear unabhängig* voneinander sind (ein Fundamentalsystem bilden).

Die Bedingung, daß diese Unabhängigkeit besteht, ist das Nichtverschwinden der Determinante:

(16) $$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} & \dots & \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} \\ \frac{d^{n-2} y_1}{dx^{n-2}} & \frac{d^{n-2} y_2}{dx^{n-2}} & \dots & \frac{d^{n-2} y_n}{dx^{n-2}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \dots & \frac{dy_n}{dx} \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{vmatrix}.$$

Das allgemeine Integral der *inhomogenen* Gleichung $\Phi(D)y = V$ berechnet sich dann zu:

$$y = \sum_{r=1}^{n} y_r \left[C_r + \int \frac{V \Delta_r}{\Delta} dx\right] \tag{17}$$

Hierbei bedeutet Δ_r die zu $\frac{d^{n-1} y_r}{dx^{n-1}}$ gehörige Unterdeterminante in Δ (vgl. S. 7).

Die an dieser und anderen Stellen (vgl. S. 117) auftretende Form der Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung führt uns auf eine allgemeinere Methode. Wir suchen eine Lösung von der Form:

$$y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi)\, V(\xi)\, d\xi. \tag{18}$$

Die in dieser Gleichung auftretende Funktion $G(x, \xi)$ bezeichnet man als *„Greensche Funktion"* des gegebenen Differentialausdrucks. Damit die Gleichung (18) wirklich eine Lösung der Differentialgleichung ist, muß die *Greensche* Funktion folgende Eigenschaften haben: Die Funktion $G(x, \xi)$ erfüllt als Funktion von x betrachtet die homogene Gleichung, mit Ausnahme des Punktes $x = \xi$. In diesem Punkt bleibt die Funktion samt ihren Ableitungen bis zur $n-2$-ten Ordnung stetig, die $n-1$-te Ableitung springt aber hier um den Betrag 1.

Die allgemeine Lösung bekommt man durch Hinzufügung einer linearen Kombination der n linear unabhängigen Lösungen der homogenen Gleichung.

Sind der Lösung gewisse *Bedingungen* auferlegt (Anfangsbedingungen, Randbedingungen, Nebenbedingungen), so können diese dadurch erfüllt werden, daß man die zur Verfügung stehenden n Konstanten entsprechend wählt.

Wird die Lösung nur zwischen 2 Punkten gesucht und werden in einem oder beiden dieser Punkte bestimmte *Randbedingungen* irgend welcher Art vorgeschrieben, so wählt man vorerst die Konstanten der homogenen Lösung derart, daß die Randbedingungen erfüllt werden. Es bleibt dann noch eine eindeutig bestimmte partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung übrig unter Randbedingungen, bei denen die homogene Gleichung keine von 0 verschiedene Lösung hat (*„homogene Randbedingungen"*). Diese Lösung kann wieder in der Form (18) angesetzt werden, wobei das Integral jetzt nur zwischen den beiden Grenzen zu nehmen ist. Die *Greensche* Funktion muß nun selbst an den Grenzen die obigen homogenen Randbedingungen erfüllen. Sie ist dadurch eindeutig festgelegt.

Handelt es sich um einen „sich selbst adjungierten" Differentialausdruck (vgl. S. 107), so hat die *Greensche* Funktion die besondere und für die Anwendung besonders wichtige Eigenschaft, daß sie *sym-*

metrisch ist in x und ξ, also:

$$G(x, \xi) = G(\xi, x).$$

Im Fall einer Gleichung 2. Ordnung ist das durch eine Transformation der gesuchten Funktion y in:

$$z = y e^{\int X_1 dx}$$

immer zu erreichen.

3. Besondere Formen von Differentialgleichungen.

a) $\frac{d^n y}{dx^n} = \varphi(y)$. Diese Gleichung ist durch Quadratur nur integrierbar für $n = 1$ und $n = 2$.

Für $n = 2$ ergibt Multiplikation mit $2\frac{dy}{dx}$ und Integration:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\int Y dy + A,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \psi(y) + A.$$

Durch Trennung der Variablen ergibt sich als vollständiges Integral:

$$\int \frac{dy}{[\psi(y) + A]^{\frac{1}{2}}} = x + B.$$

b$_1$) Jede Gleichung der Form:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$$

ist durch Quadratur integrierbar. Man setzt:

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = z$$

und erhält

$$\frac{dz}{dx} = F(z),$$

$$\int \frac{dz}{F(z)} = x + C.$$

Auflösung dieser Gleichung nach z ergibt:

$$z = \varphi(x + C) = \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}.$$

Zur Lösung dieser Gleichung vgl. die Lösung der Gleichung:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x). \quad \text{(Vgl. 2. a) 5 S. 110.)}$$

b_2) Zur Lösung der Gleichung von der Form:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F\left(\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}\right)$$

setzt man

$$z = \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}$$

und erhält

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = F(z).$$

Die Lösung hiervon ist nach a) (s. o.)

$$\int \frac{dz}{\left[A + 2\int F(z)\, dz\right]^{\frac{1}{2}}} = x + B.$$

Die Auflösung nach $z = f(x) = \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}$ ergibt durch Integration die endgültige Lösung (vgl. S. 110).

c) Eine Differentialgleichung *zweiter* Ordnung, in der eine der Veränderlichen nicht explizit auftritt, kann durch Substitution in eine Differentialgleichung *erster* Ordnung verwandelt werden (Erniedrigung der Ordnung).

1. $$\psi\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}\right) = 0. \quad \text{Es fehlt } x.$$

Man setzt: $\frac{dy}{dx} = p$ und $\frac{d^2 y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$ und betrachtet p als Funktion von y. Dann erhält man die Gleichung 1. Ordnung:

$$\psi\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0,$$

mit der Lösung $p(y) = \frac{dy}{dx}$, daher $x = \int \frac{dy}{p(y)} + A$.

2. $$\psi\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}\right) = 0. \quad \text{Es fehlt } y.$$

Setzt man $\frac{dy}{dx} = p$ und $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$ und betrachtet p as Funktion von x, so erhält man die Gleichung 1. Ordnung:

$$\psi\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0.$$

d) **Eindimensionale Differentialgleichungen** (vgl. S. 100). Ist (bei Betrachtung von y (ebenso wie x) als Größe von der ersten Dimension) die Differentialgleichung eindimensional, so setzt man:

$$y = x z \quad \text{und} \quad x = e^{\vartheta};$$

wegen

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{1}{x}$$

wird dann

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{d\vartheta} + z, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2z}{d\vartheta^2} + \frac{dz}{d\vartheta}\right) e^{-\vartheta}.$$

Bei Ausführung der Substitution zeigt sich, daß die neue unabhängige Variable ϑ nicht explizit in der Gleichung vorkommt. Die eindimensionale Gleichung läßt also wie unter c) eine Erniedrigung der Ordnung zu. Dasselbe gilt, wenn die vorgelegte Differentialgleichung eindimensional ist bei Betrachtung von y als Größe der m-ten Dimension. In diesem Fall setzt man

$$y = x^m z, \qquad x = e^{\vartheta},$$

also

$$y = z e^{m\vartheta}$$

und

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dz}{d\vartheta} + mz\right) e^{(m-1)\vartheta},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{\frac{d^2z}{d\vartheta^2} + (2m-1)\frac{dz}{d\vartheta} + m(m-1)z\right\} e^{(m-2)\vartheta} \text{ usw.}$$

e) **Exakte Differentialgleichungen.** Eine exakte Differentialgleichung ist eine Gleichung von der Form

$$V = f\left(\frac{d^ny}{dx^n}, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \ldots, \frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0,$$

wenn $V\,dx$ das exakte (vollständige) Differential einer Funktion U ist, wobei U eine Funktion von $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ bis y und x ist. $U = \text{const}$ ist dann ein intermediäres Integral. Eventuell läßt sich $V\,dx$ durch Multiplikation mit einem Faktor, nämlich einer Funktion von $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ bis y und x zum exakten Differential machen. *(Integrierender Faktor.)*

4. Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung.

a) Die allgemeine Form einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + X_1\frac{dy}{dx} + X_2 y = X_3, \tag{1}$$

wo die X_1, X_2, X_3 Funktionen von x oder konstant sind.

Setzt man X_3 gleich Null und ist y_0 eine Lösung dieser reduzierten Gleichung, so lautet die vollständige Lösung der ursprünglichen Gleichung:

$$y = C_1 y_0 + C_2 y_0 \int \frac{dx}{y_0^2} e^{-\int X_1 dx} + y_0 \int \frac{dx}{y_0^2}\left\{e^{-\int X_1 dx} \int y_0 X_3 e^{\int X_1 dx} dx\right\}. \tag{2}$$

b) Kann man für die reduzierte Gleichung keine Lösung erhalten, so kann man setzen:

$$y = v \cdot e^{-\frac{1}{2}\int X_1 dx}, \tag{3a}$$

ferner

(3b) $$I = X_2 - \frac{1}{2}\frac{dX_1}{dx} - \frac{1}{4}X_1^2.$$

Dann hat man statt der ursprünglichen Gleichung die Beziehung:

(4) $$\frac{d^2v}{dx^2} + Iv = X_3 \cdot e^{\frac{1}{2}\int X_1 dx},$$

deren Lösung jetzt zu versuchen ist, indem man die rechte Seite gleich 0 setzt und zunächst eine Lösung der so reduzierten Gleichung sucht. I heißt die *Invariante* der Koeffizienten der Differentialgleichung.

c) An Stelle der reduzierten Gleichung der ursprünglich vorgelegten linearen Differentialgleichung 2. Ordnung kann man sich demnach auf die Behandlung der Normalform

(5) $$\frac{d^2v}{dx^2} + Iv = 0$$

beschränken. Führt man die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + X_1\frac{dy}{dx} + X_2 y = 0$$

durch irgendeine Substitution $y = z f(x)$ über in

(6) $$\frac{d^2z}{dx^2} + X_1'\frac{dz}{dx} + X_2' z = 0,$$

so hat, nachdem das Glied mit $\frac{dz}{dx}$ durch die Substitution $z = w \cdot e^{-\frac{1}{2}\int X_1' dx}$ weggeschafft ist, diese Gleichung ebenfalls die Normalform

$$\frac{d^2w}{dx^2} + Iw = 0,$$

wo I dieselbe Funktion von X_1, X_2 ist, wie von X_1' und X_2' (daher ihre Bezeichnung als Invariante). Haben umgekehrt zwei Gleichungen (wie die für y, X_1, X_2 und z, X_1', X_2') dieselbe Normalform, so können sie ineinander transformiert werden.

Spezialfall: Ist $I = \alpha x^m$, so ist eine Lösung:

$$w = \sqrt{x}\, Z_{\frac{1}{m+2}}\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{m+2} x^{\frac{m+2}{2}}\right)$$

wo $Z_{\frac{1}{m+2}}$ eine Zylinderfunktion der Ordnung $\frac{1}{m+2}$ bedeutet (s. S. 63 ff.).

d) **Integration durch Änderung der unabhängigen Variablen.** Führt man in der ursprünglichen Gleichung ein:

$$z = \int e^{-\int X_1 dx} dx,$$

an Stelle von x, so verschwindet der Koeffizient des durch einfache Substitution von z auftretenden Gliedes mit $\frac{dy}{dz}$, und man erhält die

Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + X_2 y = 0.$$

Besonders einfach ist die Lösung in folgenden 2 Fällen:

1. Erfüllt z die Gleichung:

$$\mu\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = X_2 z^2,$$

so wird

$$y = C_1 z^\alpha + C_2 z^\beta,$$

wo α und β die Wurzeln der Gleichung $m(m-1)+\mu = 0$ sind.

2. Auch im Falle

$$\mu\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = X_2$$

läßt sich leicht ein Integral finden.

e) **Die Variation der Konstanten**[1]. Ist $y_1 = f_1(x)$ eine Lösung der reduzierten (homogenen) Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + X_1 \frac{dy}{dx} + X_2 y = 0,$$

so ergibt sich als weitere Lösung

(7) $$y_2 = y_1 \int \frac{dx}{y_1^2} e^{-\int X_1 dx} \cdot G,$$

wo G eine beliebige Konstante ist. Die vollständige Lösung der reduzierten Gleichung wird dann

(8) $$y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Um die Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, werden die Größen C_1 und C_2 jetzt nicht mehr als Konstanten sondern als Funktionen von x betrachtet, die so zu bestimmen sind, daß die *inhomogene* Gleichung erfüllt wird.

Die Form der Lösung ist für die homogene und für die inhomogene Gleichung dieselbe. Der Unterschied liegt darin, daß die Konstanten, die in der Lösung der homogenen Gleichung auftreten, in der Lösung der inhomogenen Gleichung als Funktionen der unabhängigen Variablen erscheinen. Diese Methode wird als „Variation der Konstanten" bezeichnet.

Dabei hat man eine Relation zwischen C_1 und C_2 frei.

Man fordert, daß

(9) $$y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} = 0$$

ist und erhält aus

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$$

---

[1]) Spezialfall von 2b) S. 110.

durch Differentiation

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C_1 \frac{d^2y_1}{dx^2} + C_2 \frac{d^2y_2}{dx^2} + \frac{dC_1}{dx}\frac{dy_1}{dx} + \frac{dC_2}{dx}\frac{dy_2}{dx}.$$

Die Substitution dieser Werte von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ in die inhomogene Gleichung ergibt

$$\frac{dC_1}{dx}\frac{dy_1}{dx} + \frac{dC_2}{dx}\frac{dy_2}{dx} = X_3.$$

Daraus folgt

$$(10)\qquad \begin{aligned} C_2 &= E + \frac{1}{G}\int X_3\, y_1\, e^{\int X_1 dx}\, dx, \\ C_1 &= F - \frac{1}{G}\int X_3\, y_2\, e^{\int X_1 dx}\, dx, \end{aligned}$$

wo E und F willkürliche Konstanten und G eine von der Wahl von y_1 und y_2 abhängende Konstante ist (s. oben).

Das vollständige Integral der inhomogenen Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + X_1 \frac{dy}{dx} + X_2\, y = X_3$$

ist schließlich

$$(11)\quad y = E f_2(x) + F f_1(x) + \frac{1}{G}\int^x X_3(\xi)\, e^{\int^\xi X_1(x)\, dx}\left[f_2(x)\, f_1(\xi) - f_1(x)\, f_2(\xi)\right] d\xi,$$

wobei f_1 und f_2 partikuläre Integrale der homogenen Gleichung sind.

Der Faktor von X_3 im Integral stellt die Einwirkung dar, die von der Stelle ξ auf die Stelle x ausgeübt wird. Man bezeichnet ihn als *Greensche* Funktion (vgl. S. 111).

Ein Spezialfall zu e) ist folgende:

f) **Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung** mit konstanten Koeffizienten mittels einer *Greenschen* Funktion (Erzwungene Schwingung), wo diese offenbar nur von $(x - \xi)$ abhängen kann. $\dot{x}$ bedeutet $\frac{dx}{dt}$, usw.

$$(12)\qquad \ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t) = \text{beliebig gegebene Funktion}^{1)}.$$

Der Ansatz:

$$(13)\qquad x = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\, \varphi(t - \tau)\, d\tau$$

[1] Die Bezeichnung ist hier dem physikalischen Problem angepaßt. Die Buchstaben t, τ, x entsprechen den obigen x, ξ, y.

mit der später zu bestimmenden Funktion $\varphi(t)$ führt zu

$$\dot{x} = f(t)\,\varphi(0) + \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,\dot{\varphi}(t-\tau)\,d\tau$$

$$\ddot{x} = \dot{f}(t)\,\varphi(0) + f(t)\,\dot{\varphi}(0) + \int_{-\infty}^{t} f(t)\,\ddot{\varphi}(t-\tau)\,d\tau.$$

Das gibt in die obige Differentialgleichung eingefügt:

$$(14)\quad f(t) = [\dot{f}(t) + a\,f(t)]\,\varphi(0) + f(t)\,\dot{\varphi}(0) + \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,(\ddot{\varphi} + a\,\dot{\varphi} + b\,\varphi)\,d\tau.$$

Da diese Gleichung für alle Werte von t erfüllt sein soll, ist ein naheliegender Ansatz:

$$\varphi(0) = 0; \quad \dot{\varphi}(0) = 1; \quad \ddot{\varphi} + a\,\dot{\varphi} + b\,\varphi = 0,$$

d. h.

$$(15)\quad \varphi(t) = \frac{e^{-\frac{a}{2}t}}{\sqrt{a^2 - 4b}}\left(e^{t\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}} - e^{-t\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}}\right) \text{ für positives Argument,}$$

$$= 0 \qquad \text{für negatives Argument.}$$

Sonderfälle: I. $a^2 < 4b$ (schwache Dämpfung). Zur Abkürzung setzen wir

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = i\,\omega_0; \qquad \frac{a}{2} = \delta; \qquad \varphi(t) = \frac{e^{-\delta t}}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

mit ω_0 als „Eigenfrequenz". Die Lösung wird dann:

$$x = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\cdot\frac{e^{-\delta(t-\tau)}}{\omega_0}\sin\omega_0(t-\tau)\,d\tau.$$

II. $a^2 = 4b$ (aperiodischer Grenzfall)

$$x = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\cdot e^{-\delta(t-\tau)}(t-\tau)\;d\tau.$$

III. $a^2 > 4b$ (starke Dämpfung). Zur Abkürzung setzen wir

$$\delta_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}; \quad \delta_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

$$x = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\cdot\frac{e^{-\delta_1(t-\tau)} - e^{-\delta_2(t-\tau)}}{\delta_2 - \delta_1}\,d\tau.$$

Beispiele für verschiedene $f(t)$:

A. $f(t) = \frac{p}{\varepsilon}$ im Intervall T bis $T + \varepsilon$, im übrigen $= 0$ (kurzer Impuls).

$$\left.\begin{array}{lll} \text{I.} & a^2 < 4b; & x = p \cdot \dfrac{e^{-\delta(t-T)}}{\omega_0} \sin \omega_0 (t - T) \\ \text{II.} & a^2 = 4b; & x = p \cdot e^{-\delta(t-T)}(t - T) \\ \text{III.} & a^2 > 4b; & x = \dfrac{p}{\delta_2 - \delta_1}\left(e^{-\delta_1(t-T)} - e^{-\delta_2(t-T)}\right) \end{array}\right\} \quad \text{für } t > T$$

B. $f(t) = A \cdot \sin \omega t$ (Periodische Kraft).

$$x = B \cdot \cos(\omega t - \beta),$$

worin für

I. $a^2 < 4b$: $\quad B = \dfrac{A}{\sqrt{(\delta^2 + \omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\delta^2 + \omega_0^2 - \omega^2}{2\delta\omega}.$

II. $a^2 = 4b$: $\quad B = \dfrac{A}{\sqrt{(\delta^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\delta^2 - \omega^2}{2\delta\omega}.$

III. $a^2 > 4b$: $\quad B = \dfrac{A}{\sqrt{(\delta_1\delta_2 - \omega^2)^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2\omega^2}}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\delta_1\delta_2 - \omega^2}{(\delta_1 + \delta_2)\omega}.$

f) Integration durch Reihenentwicklung.

Die Differentialgleichung 2. Ordnung sei eventuell durch Entwicklung auf die Form gebracht:

(16) $$\frac{d^2y}{dx^2}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) + \frac{dy}{dx}(b_0 + b_1 x + \ldots) + y(c_0 + c_1 x + \ldots) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \ldots$$

Man macht jetzt den Ansatz:

(17) $$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots$$

Die Aufgabe ist dann, die Koeffizienten α_i dieser Entwicklung zu bestimmen. Durch Einsetzen des Ansatzes für y, sowie der daraus formal gebildeten Ableitungen:

$$\frac{dy}{dx} = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + \ldots$$

und

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\alpha_2 + 2 \cdot 3\alpha_3 x + 3 \cdot 4\alpha_4 x^2 + \ldots$$

in die Differentialgleichung findet man, da die resultierende Gleichung in x identisch erfüllt sein muß (Koeffizientenvergleichung), das folgende Gleichungssystem für die α_i:

$$\alpha_0 c_0 + \alpha_1 b_0 + 2\alpha_2 a_0 = d_0$$
$$\alpha_0 c_1 + \alpha_1(b_1 + c_0) + \alpha_2(2a_1 + 2b_0) + \alpha_3 \cdot 2 \cdot 3 a_0 = d_1 \quad \text{usw.}$$

oder allgemein:

(18) $$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \left(i(i-1)a_{n-i+2} + i\, b_{n-i+1} + c_{n-i}\right) = d_n.$$

Die Auflösung ist sukzessive möglich, wenn $a_0 \neq 0$ ist. Jede Gleichung enthält eine Unbekannte α_i mehr als die vorhergehenden;

und liefert daher unmittelbar deren Wert, wenn alle α_k für $k < i$ bekannt sind.

Man sieht sofort, daß zwei α beliebig angenommen werden können, z. B. α_0 und α_1; dann liefert die erste Gleichung α_2, die zweite α_3 usw. (Vgl. S. 58.) Um eine Lösung y_0 der inhomogenen Gleichung zu finden, kann man z. B. $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ setzen. Sind alle $d_i = 0$ und setzt man $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$, so erhält man eine Lösung y_1 der homogenen Gleichung, ebenso eine zweite Lösung y_2 für $d_i = 0$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$.

Die allgemeine Lösung ist dann $y_0 + A y_1 + B y_2$ mit beliebigem A und B.

Es bleibt natürlich zu untersuchen, ob die gefundene Entwicklung konvergiert. Eventuell wiederholt man das Verfahren, indem man in einem andern Punkt entwickelt (Substitution: $x' = x - x_0$). An singulären Stellen der Differentialgleichung macht man Lösungsansätze der Form:

$$x^r (\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots)$$

oder

$$x^r \ln x (\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots),$$

wo r passend zu wählen ist.

Analog verfährt man bei Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Nach diesem Verfahren findet man z. B. folgende Lösungen praktisch wichtiger Differentialgleichungen:

1. *Gaußsche* Differentialgleichung:

$$x(1-x)\frac{d^2 y}{d x^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{d y}{d x} - \alpha\beta y = 0.$$

Lösung:

$$y = A F(\alpha, \beta, \gamma, x) + B x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x)$$

$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ bedeutet hierin die *hypergeometrische Reihe*:

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \ldots$$

A und B sind willkürliche Konstanten.

2. *Legendresche* Differentialgleichung:

$$(1-x^2)\frac{d^2 y}{d x^2} - 2x\frac{d y}{d x} + n(n+1)y = 0.$$

n ist eine ganzzahlige Konstante.

Lösung: $$y = A P_n(x) + B Q_n(x).$$

P_n bzw. Q_n bedeuten Kugelfunktionen 1. bzw. 2. Art (s. Seite 54 ff.).

3. *Besselsche* Differentialgleichung:

$$x^2 \frac{d^2 y}{d x^2} + x \frac{d y}{d x} + (x^2 - n^2) y = 0.$$

n ist eine Konstante.

Lösung: $$y = A I_n(x) + B N_n(x).$$

I_n bzw. N_n bedeuten Zylinderfunktionen 1. und 2. Art (s. Seite 63 ff.).

5. Systeme von Differentialgleichungen (simultane Differentialgleichungen).

Sind die Gleichungen nach den Differentialquotienten aufgelöst, *von 1. Ordnung*, und existiert neben den n abhängigen Variablen y der n Gleichungen nur eine unabhängige Variable x, so hat das System die Form:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{d y_1}{d x} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \frac{d y_2}{d x} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d y_n}{d x} &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Auf diese Form können aber alle Systeme von n Differentialgleichungen mit n abhängigen Variabeln einer unabhängigen Variabeln gebracht werden. Kommt nämlich z. B. auch die 2. Ableitung vor, z. B. $\frac{d^2 y_1}{d x^2}$, so führt man eine neue abhängige Variable y_{n+1} ein durch die weitere Gleichung $\frac{d y_1}{d x} = y_{n+1}$ und ersetzt $\frac{d^2 y_1}{d x^2}$ durch $\frac{d y_{n+1}}{d x}$. Analog verfährt man beim Auftreten höherer Ableitungen.

Die vollständigen Lösungen stellen ein System von n Gleichungen dar von der Form:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\varphi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0 \\ &\varphi_2(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_n(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \end{aligned}$$

wo die C_i willkürliche Konstanten sind. Außerdem können singuläre Lösungen bestehen.

Die Differentialgleichungen können auch in der Form geschrieben werden:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{d y_1}{d x} &= \frac{X_1}{X} \\ \frac{d y_2}{d x} &= \frac{X_2}{X} \text{ usw.,} \end{aligned}$$

wo X, X_1 usw. Funktionen von $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ sind, also

$$(3') \qquad \frac{dx}{X} = \frac{dy_1}{X_1} = \frac{dy_2}{X_2} = \ldots = \frac{dy_n}{X_n}.$$

Die Lösungen können ferner auch in der Form geschrieben werden:

$$(4) \qquad \begin{aligned} \Psi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) &= C_1 \\ \Psi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) &= C_2 \text{ usw.,} \end{aligned}$$

wo die Ψ_i voneinander unabhängig sind. (Nichtverschwinden der Funktionaldeterminante.)

Jede Funktion $\Pi(\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_n)$ ist konstant gesetzt dann gleichfalls eine Lösung.

Es besteht dann die Gleichung:

$$(5) \qquad X\frac{\partial \Pi}{\partial x} + X_1\frac{\partial \Pi}{\partial y_1} + X_2\frac{\partial \Pi}{\partial y_2} + \ldots = 0.$$

a) Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Die Zahl der Gleichungen sei gleich der Zahl der abhängigen Variablen.

Hat man nur zwei abhängige Variable x und y und die eine unabhängige Variable t, so lautet das System

$$(6) \qquad \begin{aligned} f_1(D)x + \varphi_1(D)y &= T_1 \\ f_2(D)x + \varphi_2(D)y &= T_2. \end{aligned}$$

$f(D)x$ ist eine Abkürzung (s. S. 107) für

$$(7) \qquad C_0\frac{d^n x}{dt^n} + C_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + C_n x = (C_0 D^n + C_1 D^{n-1} + \ldots + C_n)x.$$

T_1 und T_2 sind Funktionen von t allein.

Berechnet man nun $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ als Wurzeln der Gleichung

$$(8) \qquad \varphi_2(\lambda)f_1(\lambda) - \varphi_1(\lambda)f_2(\lambda) = 0.$$

so ist die *vollständige* Lösung

$$(9) \qquad \begin{aligned} x &= A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + A_m e^{\lambda_m t} + P(t) \\ y &= B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + B_m e^{\lambda_m t} + Q(t), \end{aligned}$$

worin die A_i willkürliche Konstanten sind.

Die B_i folgen aus den Relationen

$$A_i f_1(\lambda_i) + B_i \varphi_1(\lambda_i) = 0.$$

$P(t)$ ist dabei ein *partikuläres* Integral der Gleichung

$$\{\varphi_2(D)f_1(D) - \varphi_1(D)f_2(D)\}x = \varphi_2(D)T_1 - \varphi_1(D)T_2.$$

$Q(t)$ ist ein *partikuläres* Integral der Gleichung

$$\{\varphi_2(D)f_1(D) - \varphi_1(D)f_2(D)\}y = f_1(D)T_2 - f_2(D)T_1.$$

Sind zwei λ, z. B. λ_1 und λ_2, komplex und konjugiert, also

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \qquad \lambda_2 = \alpha - i\beta,$$

so heißt der entsprechende Teil von x

$$e^{\alpha t}(L_1 \cos\beta t + L_2 \sin\beta t),$$

und von y

$$e^{\alpha t}(M_1 \cos\beta t + M_2 \sin\beta t).$$

Die Relation zwischen den L und M findet man am besten durch Einsetzen in die Differentialgleichung.

Sind zwei λ gleich, z. B. λ_1 und λ_2, so heißt der entsprechende Teil von x

$$e^{\lambda_1 t}(A + A't),$$

der von y

$$e^{\lambda_1 t}(B + B't).$$

Dabei gelten die Relationen:

$$A' f_1(\lambda) + B' \varphi_1(\lambda) = 0,$$

$$A f_1(\lambda) + B \varphi_1(\lambda) + A' \frac{d f_1(\lambda)}{d\lambda} + B' \frac{d\varphi_1(\lambda)}{d\lambda} = 0.$$

Führt man entspr. S. 121 neue Variable y_i ein, so kommt man zu dem allgemeinen Fall:

b) System homogener linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung.

$$(10)\qquad \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= c_{11} y_1 + c_{12} y_2 + \dots + c_{1n} y_n \\ \frac{dy_2}{dx} &= c_{21} y_1 + c_{22} y_2 + \dots + c_{2n} y_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= c_{n1} y_1 + c_{n2} y_2 + \dots + c_{nn} y_n . \end{aligned}$$

Die c_{ik} seien Konstanten. Man setzt $y_1 = a_1 e^{\lambda x}$, $y_2 = a_2 e^{\lambda x}$ usw. Dann erhält man λ als Wurzel der Gleichung

$$(11)\qquad L(\lambda) = \begin{vmatrix} c_{11} - \lambda, & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21}, & c_{22} - \lambda \dots & & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1}, & c_{n2} & \dots & c_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Ihre n Wurzeln seien $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Dann wird

$$(12)\qquad \begin{aligned} y_1 &= h_1 a_{11} e^{\lambda_1 x} + h_2 a_{12} e^{\lambda_2 x} + \dots + h_n a_{1n} e^{\lambda_n x} \\ y_2 &= h_1 a_{21} e^{\lambda_1 x} + h_2 a_{22} e^{\lambda_2 x} + \dots + h_n a_{2n} e^{\lambda_n x} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= h_1 a_{n1} e^{\lambda_1 x} + h_2 a_{n2} e^{\lambda_2 x} + \dots + h_n a_{nn} e^{\lambda_n x}, \end{aligned}$$

wo die h willkürliche Konstanten sind. Die a_{ik} sind die Lösungen des Gleichungssystems:

$$(13)\quad \begin{array}{lllll} (c_{11}-\lambda_k)\,a_{1k} & +\,c_{12}a_{2k} & +\dots+ & c_{1n}a_{nk} & =0 \\ c_{21}\cdot a_{1k} & +\,(c_{22}-\lambda_k)\,a_{2k} & +\dots+ & c_{2n}a_{nk} & =0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1}\cdot a_{1k} & +\,c_{n2}a_{2k} & +\dots+ & (c_{nn}-\lambda_k)\,a_{nk} & =0 \end{array}$$

Die Lösung ist nur dann vollständig, d. h. man erhält n linear unabhängige Systeme von Funktionen, wenn alle λ_i verschieden sind. Treten m-fache Wurzeln auf, so erhält man die noch fehlenden Lösungen durch den Ansatz:

$$y_i = (a_i + b_i x + \dots + f_i x^m)\,e^{\lambda_i x}.$$

6. Totale Differentialgleichungen (Pfaffsche Gleichungen).

Eine totale Differentialgleichung in drei Veränderlichen, homogen und linear in den Differentialen, hat die Form

$$(1)\qquad P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

worin P, Q, R Funktionen von x, y, z sind. Durch diese Gleichung wird jedem Punkte des Raumes ein Flächenelement zugeordnet.

1. Die Beziehung

$$(2)\qquad K = P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0,$$

die sogenannte „Integrabilitätsbedingung“, ist notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Lösung von der Form

$$(3)\qquad \Phi(x, y, z) = C.$$

Geometrisch bedeutet die Lösung eine Flächenschar. Eine Gleichung, die die Integrabilitätsbedingung erfüllt, heißt auch eine „eigentliche“ totale Differentialgleichung.

2. Ist $K \neq 0$, so bildet man eine willkürliche Beziehung

$$\psi(x, y, z) = 0$$

und ihr Differential

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \psi}{\partial z}\,dz = 0.$$

Bestimmt man aus diesen zwei Gleichungen z und dz als Funktion von x, y, dx, dy und setzt man die Werte für z und dz in die totale Differentialgleichung ein, so erhält man aus ihr eine Gleichung der Form

$$(4)\qquad M\,dx + N\,dy = 0,$$

wo M und N Funktionen von x und y sind. Das Integral dieser Gleichung sei

$$\varphi(x, y) = C.$$

Dann besteht die *Lösung* der ursprünglichen Gleichung aus den beiden simultanen Gleichungen

$$(5)\qquad \begin{cases} \psi(x, y, z) = 0 \\ \varphi(x, y) = C \end{cases}$$

Die Lösung bedeutet also gewisse Kurvenscharen auf beliebigen Flächen. Derartige Gleichungen, für die $K \neq 0$ ist, heißen auch „uneigentliche" totale Differentialgleichungen.

Im Falle $K = 0$ wird die Lösung $\Phi(x, y, z) = \text{const}$ folgendermaßen gefunden. Man bildet die Hilfsgleichung

$$P\,dx + Q\,dy = 0$$

mit z als Konstante und sucht ihr Integral $u(x, y, z) = u = \text{const}$, also

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0;$$

dann bestimmt sich ein „integrierender" Faktor λ durch

$$\lambda = \frac{1}{P}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Q}\cdot\frac{\partial u}{\partial y},$$

welcher die Gleichung

$$\lambda(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = 0$$

auf die Form bringt:

$$du + S\,dz = 0,$$

worin

$$\lambda R - \frac{\partial u}{\partial z} = S$$

bedeutet. Führt man schließlich in S statt x, y, z die Variablen x, u, z mit Hilfe von $u(x, y, z) = u$ ein

$$S(x, y, z) = \overline{S}(x, u, z),$$

so wird in dieser neuen Form $\overline{S}$ von x unabhängig. Das vollständige Integral $\psi(u, z) = \text{const}$ der Gleichung

$$du + \overline{S}\,dz = 0$$

gibt dann eine vollständige Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung, wenn man in $\psi(u, z)$ noch u durch $u(x, y, z)$ ersetzt:

$$\psi(u, z) = \Phi(x, y, z) = \text{const.}$$

Statt des oben bestimmten Wertes λ ist auch $\lambda\cdot F(\Phi)$ ein integrierender Faktor, wo F eine willkürliche Funktion der Lösung Φ bedeutet. Die Integrabilität, d. h. die Existenz eines integrierenden Faktors hat die geometrische Bedeutung, daß, wenn man x, y, z als Koordinaten im Raum auffaßt, man von einem gegebenen Punkt aus, längs solcher Kurvenstücke, die Lösung der Differentialgleichung sind, nicht jeden Punkt seiner Umgebung erreichen kann.

Für mehr als drei Variabeln gelten analoge Aussagen im Mehrdimensionalen; für nur zwei Variabeln existiert immer ein integrierender Faktor.

C. Partielle Differentialgleichungen.

1. Verschiedene Arten partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung.

I. **Die in den Ableitungen lineare partielle Differentialgleichung** mit zwei unabhängigen Variablen x und y und einer abhängigen Variablen z lautet:

(1) $$P(x, y, z) \cdot p + Q(x, y, z) q = R(x, y, z)$$

wo

(2) $$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Man bildet das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen (siehe S. 122)

(3) $$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

und bestimmt für dieses System zwei voneinander unabhängige Integrale $u(x, y, z) = a$ und $v(x, y, z) = b$.

Dann ist $\varphi(u, v) = 0$ eine Lösung der gegebenen Gleichung, wo φ eine *beliebige* Funktion ist. Diese Lösung enthält alle Lösungen mit Ausnahme der singulären.

Entsprechend wird bei mehr unabhängigen Variablen verfahren.

II. **Hauptformen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung.**

1. Hauptform: $\psi(p, q) = 0$ oder $q = f(p)$.

Die Variablen treten nicht explizit auf.

Das vollständige Integral ist

$$z = ax + by + c, \quad \text{wo} \quad \psi(a, b) = 0 \quad \text{oder} \quad b = f(a),$$

also

$$z = ax + yf(a) + c.$$

2. Hauptform: $\chi(z, p, q) = 0$.

Die unabhängigen Variablen treten nicht explizit auf.

Man setzt $z = z(x + ay) = z(\xi)$. Es wird dann

$$p = \frac{dz}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{dz}{d\xi}, \quad q = \frac{dz}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} = a \frac{dz}{d\xi},$$

das führt auf $\chi\left(z \frac{dz}{d\xi}, a \frac{dz}{d\xi}\right) = 0$, also auf eine gewöhnliche Differential-

gleichung. Es wird $\frac{dz}{d\xi} = \varphi(z, a)$,

also

$$x + ay + b = \int \frac{dz}{\varphi(z, a)} = F(z, a).$$

3. Hauptform: $\varphi(x, p) = \psi(y, q)$. (Separation der Variabeln.) Man setzt beide Seiten gleich einer Konstanten a und erhält

$$p = \vartheta_1(x, a), \qquad q = \vartheta_2(y, a).$$

Die Integrale dieser beiden Gleichungen

$$z = f_1(x, a) + \text{einer von } x \text{ unabhängigen Größe}$$
$$z = f_2(y, a) + \text{einer von } y \text{ unabhängigen Größe}$$

sind enthalten in

$$z = f_1(x, a) + f_2(y, a) + b,$$

der vollständigen Lösung der ursprünglichen Gleichung.

4. Hauptform: $z = px + qy + \varphi(p, q)$.
Die vollständige Lösung dieser Gleichung ist

$$z = ax + by + \varphi(a, b).$$

2. Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung.

a) Die in den 2. Ableitungen lineare Gleichung 2. Ordnung.

Sie lautet:

(1) $$Rr + 2Ss + Tt = V,$$

wobei

(2) $$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial q}{\partial y}$$

ist und R, S, T, V Funktionen von x, y, z, $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$ sind.

Von praktisch besonderer Bedeutung ist der speziellere Fall, wo die R, S, T nur von x und y abhängen. Dann kann man die Differentialgleichung durch eine Transformation:

$$\xi = \xi(x, y)$$
$$\eta = \eta(x, y)$$

in eine der folgenden Normaltypen überführen:

α) $$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = F\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right), \text{ (elliptischer Typus)},$$

(3) β) $$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = F\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right), \text{ (hyperbolischer „)},$$

γ) $$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = F\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right), \text{ (parabolischer „)},$$

je nachdem, ob die Determinante:

$$\begin{vmatrix} R & S \\ S & T \end{vmatrix} > 0, \text{ oder } < 0, \text{ oder } = 0 \text{ ist.}$$

Diese Transformation findet man auf folgende Weise. Man bildet die Hilfsgleichung:

$$R\,dy^2 + T\,dx^2 - 2\,S\,dx\,dy = 0.$$

Diese in bezug auf $\frac{dy}{dx}$ quadratische Differentialgleichung läßt sich nach ihren Wurzeln zerlegen und liefert 2 gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung. Lösen wir diese Gleichungen in der Form:

$$f_1(x, y) = a$$

bzw.

$$f_2(x, y) = b,$$

so werden dadurch 2 Kurvenscharen in der x-, y-Ebene definiert mit den (evtl. komplexen) Parametern a bzw. b. Führt man diese a und b als neue Variable ein, so reduziert sich unsere Ausgangsgleichung auf folgende Form:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial a\,\partial b} = F\left(a, b, z, \frac{\partial z}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial b}\right).$$

Setzt man nun:

$$a = \xi + \eta$$
$$b = \xi - \eta,$$

so erhält man die Form (β), setzt man:

$$a = \xi + i\eta$$
$$b = \xi - i\eta,$$

so erhält man die Form (α). Wird schließlich $a = b$ (wegen $S^2 = RT$), so setzt man:

$$a = b = \xi,$$

$\eta =$ beliebige Funktion von x und y, und erhält die Form (γ).

b) Methode der Separation der Variablen.

Eine häufig brauchbare Methode zur Zurückführung, besonders der in der Physik vorkommenden homogenen partiellen linearen Differentialgleichungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen besteht darin, daß man partikuläre Lösungen von der Form

$$V = f_1(q_1) \cdot f_2(q_2) \cdots f_n(q_n) \tag{4}$$

sucht, wo V die abhängige Variable, $q_1, q_2, \ldots, q_n$ die unabhängigen Variablen, z. B. die Koordinaten des Raumes und eventuell der Zeit

bedeuten. Von der Wahl dieser Koordinaten hängt dann die sp ziele Form der Gleichungen bzw. der Lösungen ab. Durch linea Kombination der Partikularlösungen findet man die vollständi Lösung.

Setzt man den Ansatz für V in die gegebene Differentialgleichu ein, so ist es häufig möglich, z. B. durch Division mit $f_2 \cdot f_3 \cdots f_n$, s auf eine Form zu bringen

$$(5)\qquad \Phi_1\left(q_1, \frac{\partial f_1}{\partial q_1}, \frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1^2}\right) + \Phi_2\left(q_2, q_3 \cdots q_n, \frac{\partial f_2}{\partial q_2}, \ldots\right) = 0,$$

d. h. auf eine solche, daß die Gleichung in zwei Summanden zerfäl von denen der eine Φ_1 die eine unabhängige Variable, z. B. q_1, alle enthält, während im andern q_1 nicht vorkommt. Da diese Gleichu für beliebige Werte von q_1 gelten soll, muß Φ_1 gleich einer Ko stanten sein.

Wir setzen daher $\Phi_1 = \text{const} = -\Phi_2$. Die erste Gleichung i eine gewöhnliche Differentialgleichung, die zweite sucht man anal wie die ursprüngliche weiter zu zerlegen.

Als Beispiel betrachten wir die Gleichung (vgl. unten 8, b)

$$(6)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \lambda^2 V = 0.$$

Wir setzen $V = P(\varrho)\,\Phi(\varphi)\,Z(z)$ und setzen ein:

$$P'' \cdot \Phi \cdot Z + \frac{P'}{\varrho} \cdot \Phi \cdot Z + \frac{1}{\varrho^2} \Phi'' \cdot P \cdot Z + P \Phi Z'' + \lambda^2 P \Phi Z = 0$$

oder

$$(7)\qquad \frac{P''}{P} + \frac{P'}{\varrho P} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{Z''}{Z} + \lambda^2 = 0.$$

Es wird also:

$$\frac{Z''}{Z} = -k^2; \qquad Z = e^{\pm i k z}$$

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -m^2; \qquad \Phi = e^{\pm i m \varphi}$$

$$\frac{P''}{P} + \frac{P'}{\varrho P} - \frac{m^2}{\varrho^2} - k^2 + \lambda^2 = 0; \qquad P = Z_m\left(\varrho \sqrt{\lambda^2 - k^2}\right) \text{ (vgl. S. 63}$$

also

$$V = e^{\pm i (k z \pm m \varphi)} Z_m\left(\varrho \sqrt{\lambda^2 - k^2}\right),$$

wo k und m beliebige Konstanten sind.

Weitere partikuläre Lösungen sind auch Ausdrücke der Form

$$\frac{\partial V}{\partial k}, \quad \frac{\partial V}{\partial m}, \quad \int V \psi(k)\, dk \text{ usw.}$$

Mit Hilfe dieser Methode findet man z. B. Lösungen von folge den Differentialgleichungen:

1. $\Delta V = 0$ *in der Ebene*[1].

a) $q_1 = x, \quad q_2 = y; \quad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$

Partikuläre Lösung: $V_k = e^{\pm k(x \pm iy)}$

bzw. $V = f_1(x + iy) + f_2(x - iy)$

$V_0 = (a_1 x + a_2)(b_1 y + b_2).$

b) $q_1 = \varrho, \quad q_2 = \varphi; \quad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial V}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0.$

Partikuläre Lösung: $V_k = \varrho^{\pm k} e^{ik\varphi}$

$V_0 = a_1 + a_2 \ln \varrho.$

2. $\Delta V = 0$ *im Raume.*

a) $q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z; \quad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$

Partikuläre Lösung: $V_{klm} = e^{(kx + ly + mz)}$, wo $k^2 + l^2 + m^2 = 0.$

b) $q_1 = \varrho, \; q_2 = \varphi, \; q_3 = z; \; \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial V}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$

Partikuläre Lösung: $V_{km} = e^{\pm i(kz \pm m\varphi)} Z_m(ik\varrho)$ [2]

$V_{0m} = (a_1 z + a_2)\varrho^m e^{\pm im\varphi}$

$V_{k0} = e^{\pm ikz}(b_1 \varphi + b_2) Z_0(ik\varrho)$

$V_{00} = (a_1 z + a_2)(b_1 \varphi + b_2)(c_1 + c_2 \ln \varrho).$

c) $q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = \vartheta;$

$$r^2 \Delta V = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Partikuläre Lösung:

$V_n = (a_1 r^n + a_2 r^{-(n+1)}) Y_n(\vartheta, \varphi)$ [3]

bzw. $V_{nk} = (a_1 r^n + a_2 r^{-(n+1)}) e^{\pm ik\varphi} P_n^k(\cos\vartheta)$ [4].

3. $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = a \frac{\partial V}{\partial y},$

$V_k = e^{\pm ikx - \frac{k^2}{a} y}$

$V_0 = a_1 x + a_2.$

---

[1]) Die inhomogene Gleichung $\Delta V = a$ wird gelöst durch $V = V_1 + V_2$, wo $\Delta V_1 = 0$, $\Delta V_2 = a$ bei z. B. $V_2 = \frac{a}{2} x^2$ oder $\frac{a}{2} y^2$ oder $\frac{a r^2}{4}$.

[2]) Z_m bedeutet eine Zylinderfunktion m-ter Ordnung (vgl. S. 63).

[3]) Y_n bedeutet eine Kugelfunktion n-ter Ordnung (vgl. S. 59).

[4]) P_n^k bedeutet eine zugeordnete Kugelfunktion (vgl. S. 61).

4. $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ (vgl. 1a).

$$V_k = e^{\pm k(x \pm a y)} \quad \text{bzw.} \quad V = f_1(x + a y) + f_2(x - a y)$$
$$V_0 = (a_1 x + a_2)(b_1 y + b_2).$$

5. $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + a \frac{\partial V}{\partial x} = b^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$,

$$V_k = e^{-\frac{a}{2}x \pm \frac{iky}{b} \pm x\sqrt{\frac{a^2}{4} - k^2}}$$
$$V_0 = (a_1 + a_2 e^{-ax})(b_1 y + b_2).$$

6. $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = a \frac{\partial V}{\partial t}$; $\quad V_{\alpha,\beta,\gamma} = e^{+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)t \pm (\alpha x \pm \beta y \pm \gamma z)\sqrt{a}}$.

7. $\Delta V + \lambda^2 V = 0$ in der Ebene.

a) $q_1 = x, \quad q_2 = y; \quad \Delta V + \lambda^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \lambda^2 V = 0.$

$$V_{k\alpha} = e^{\pm x\sqrt{k^2 - \alpha^2\lambda^2} + iy\sqrt{k^2 + (1-\alpha^2)\lambda^2}}$$
$$V_{0\alpha} = e^{\pm i\lambda\alpha x + i\lambda y\sqrt{1-\alpha^2}} \quad (\text{bzw.} = e^{\pm i(mx+ny)}, \text{ wo } m^2 + n^2 = \lambda^2)$$
$$V_{k0} = e^{\pm kx + iy\sqrt{k^2+\lambda^2}}$$
$$V_{00} = (a_1 x + a_2)e^{i\lambda y}.$$

b) $q_1 = \varrho, \quad q_2 = \varphi.$

$$V_k = e^{ik\varphi} Z_k(\lambda\varrho)$$
$$V_0 = (a_1\varphi + a_2) Z_0(\lambda\varrho).$$

8. $\Delta V + \lambda^2 V = 0$ im Raume.

a) $q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z.$

$$V_{lm} = e^{i(kx+ly+mz)}, \quad \text{wo } \lambda^2 = k^2 + l^2 + m^2.$$

b) $q_1 = \varrho, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z.$

$$V_{km} = e^{\pm i(kz + m\varphi)} Z_m\left(\varrho\sqrt{\lambda^2 - k^2}\right).$$

c) $q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = \vartheta.$

$$V_n = \frac{1}{\sqrt{r}} Z_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)\, Y_n(\vartheta, \varphi) \quad (\text{vgl. 2}).$$

Partikuläre Lösungen der Maxwellschen Gleichungen.

Auf eine Gleichung der Form: $\Delta V + \lambda^2 V = 0$ lassen sich auch die *Maxwellschen* Gleichungen zurückführen:

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\sigma\mathfrak{E} = \text{rot}\,\mathfrak{H}\ ^{1)}.$$

(1)
$$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \text{rot}\,\mathfrak{E}.$$
$$\text{div}\,\mathfrak{H} = 0.$$

[1]) Betreffs der Vektorsymbole vgl. den Abschnitt „Vektoranalysis" sowie S. 216.

Durch Einsetzen der folgenden Größen: $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 e^{i\omega t}$; $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 e^{i\omega t}$ $p = \sqrt{\varepsilon\mu - i\frac{4\pi\sigma\mu}{\omega}}$ (p = komplexer Brechungsindex), $\mathfrak{H}_0 = \frac{ip}{\mu}\mathfrak{M}_0$, wo ω ein willkürlicher Parameter, die Frequenz, ist und $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{H}_0$ und $\mathfrak{M}_0$ von t unabhängig sein sollen und durch die Ersetzung aller Längen l durch die dimensionslosen „Längen" l', wobei $l' = l \cdot \frac{\omega p}{c}$, erhält man die in $\mathfrak{E}_0$ und $\mathfrak{M}_0$ symmetrische Form:

$$(2)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}_0 = \operatorname{rot}' \mathfrak{M}_0 & \left(\operatorname{rot}' = \dfrac{\operatorname{rot}}{\frac{\omega p}{c}} \text{ usw.}\right), \\ \mathfrak{M}_0 = \operatorname{rot}' \mathfrak{E} \\ \operatorname{div}' \mathfrak{M}_0 = 0. \end{cases}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung wird erleichtert durch Einführung des transformierten *Hertzschen* Vektors $\mathfrak{P}_0$ durch die Definitionsgleichungen:

$$(3)\quad \begin{cases} \mathfrak{E} = \operatorname{grad}' \operatorname{div}' \mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_0 = \operatorname{rot}' \operatorname{rot}' \mathfrak{P}_0, \\ \mathfrak{M}_0 = \operatorname{rot}' \mathfrak{P}_0. \end{cases}$$

Dies führt auf die eine Differentialgleichung:

$$(4)\quad \operatorname{grad}' \operatorname{div}' \mathfrak{P}_0 - \operatorname{rot}' \operatorname{rot}' \mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_0 = 0,$$

oder

$$\Delta' \mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_0 = 0.$$

Das sind Differentialgleichungen der Form $\Delta V + V = 0$ für die (*Cartesischen*) Komponenten von $\mathfrak{P}_0$. Aus $\mathfrak{P}_0$ findet man durch Einsetzen die Komponenten von $\mathfrak{E}_0$ und $\mathfrak{M}_0$.

1. *Cartesische* Koordinaten (x', y', z'):

$$P_{0x} = C e^{i(kx'+ly'+mz')};\quad P_{0y} = 0;\quad P_{0z} = 0;\quad (k^2 + l^2 + m^2 = 1),$$
$$E_{0x} = C(1 - k^2) \cdot e^{i(kx'+ly'+mz')},$$
$$E_{0y} = - C \cdot kl \cdot e^{i(-)},$$
$$E_{0z} = - C \cdot km \cdot e^{i(-)},$$
$$M_{0x} = 0,$$
$$M_{0y} = C \cdot im \cdot e^{i(-)},$$
$$M_{0z} = - C \cdot il \cdot e^{i(-)}.$$

Weitere Lösungen findet man durch zyklische Vertauschung der Komponenten, sowie durch Vertauschung von $\mathfrak{E}_0$ und $\mathfrak{M}_0$.

2. Zylinderkoordinaten (ϱ', φ, z').

$$P_{0x} = C_1 \cdot e^{i(n\varphi + kz')} Z_n\left(\varrho' \sqrt{1 - k^2}\right)$$
$$P_{0y} = C_2 \cdot e^{i(-)} \cdot Z_n(-)$$
$$P_{0z} = C_3 \cdot e^{i(-)} \cdot Z_n(-)$$

oder

$$P_{0\varrho} = (C_1 \cos\varphi + C_2 \sin\varphi)\, e^{i(-)} Z_n(-)$$
$$P_{0\varphi} = (-C_1 \sin\varphi + C_2 \cos\varphi)\, e^{i(-)} Z_n(-)$$
$$P_{0z} = C_3\, e^{i(-)} Z_n(-).$$

Für $C_1 = C_2 = 0$ wird dann[1]):

$$E_{0\varrho} = C_3 \cdot ik\sqrt{1-k^2}\, Z_n'\left(\varrho'\sqrt{1-k^2}\right) e^{i(n\varphi+kz')}$$

$$E_{0\varphi} = -C_3 \frac{nk}{\varrho'} Z_n(-)\cdot e^{i(-)}$$

$$E_{0z} = C_3(1-k^2)\, Z_n(-)\, e^{i(-)}$$

$$M_{0\varrho} = C_3 \frac{in}{\varrho'} Z_n(-)\, e^{i(-)}$$

$$M_{0\varphi} = C_3\sqrt{1-k^2}\, Z_n'(-)\cdot e^{i(-)}$$

$$M_{0z} = 0\,.$$

Die Lösungen für $C_1 \neq 0$ und $C_2 \neq 0$ sind komplizierter.
Weitere Lösungen erhält man durch Vertauschung der $\mathfrak{E}_0$ und $\mathfrak{M}_0$.

3. Polar-Koordinaten (r', φ, ϑ).

$$P_{0x} = \frac{C_1}{\sqrt{r}} Z_{n+\frac{1}{2}}(r')\, Y_n(\vartheta, \varphi)$$

$$P_{0y} = \frac{C_2}{\sqrt{r'}} Z\cdot Y$$

$$P_{0z} = \frac{C_3}{\sqrt{r'}} Z\cdot Y.$$

Hieraus folgen Lösungen für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$.

Um ein besonders einfaches und symmetrisches System zu erhalten, kann man wie folgt verfahren. Setzt man:

$$\frac{Y_n}{r^{n+1}} = V_n;\,^{2)} \quad r^{n+\frac{1}{2}} Z_{n+\frac{1}{2}}(r) = L_n(r); \qquad \left(V_n L_n = \frac{Y_n Z_{n+\frac{1}{2}}(r)}{\sqrt{r}}\right)$$

so wird

$$\Delta(V_n L_n) + V_n L_n = 0\,.$$

Für L_n gelten folgende Formeln:

$$L_n'' - \frac{2n}{r} L_n' + L_n = 0$$

$$L_n(2n+1) = L_{n+1} + r^2 L_{n-1}$$

$$L_n' = r L_{n-1} \qquad \left(\frac{\partial L_n}{\partial x} = x L_{n-1}\right)$$

$$\Delta L_n = 2(n+1) L_{n-1} - L_n \qquad \operatorname{grad} L_n = \mathfrak{r} L_{n-1}$$

für V_n:

$$\Delta V_n = 0$$

$$r\frac{\partial V_n}{\partial r} = x\cdot\frac{\partial V_n}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial V_n}{\partial y} + z\cdot\frac{\partial V_n}{\partial z} = -(n+1)V_n = (\mathfrak{r}\operatorname{grad} V_n)\,.$$

---

[1]) Z' bedeutet die Ableitung von Z nach seinem Argument.

[2]) Es gibt $2n-1$ verschiedene Y_n und V_n.

Es gilt also auch:

$$\Delta\left(L_{n+1}\cdot\frac{\partial V_n}{\partial x}\right)+L_{n+1}\cdot\frac{\partial V_n}{\partial x}=0\,.$$

Die Gleichung $\Delta\mathfrak{P}+\mathfrak{P}=0$ hat daher die partikuläre Lösung:

$$\mathfrak{P}=L_{n+1}(r)\,\mathrm{grad}\,V_n(r,\varphi,\vartheta)\,.$$

Hieraus folgt:

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{P}=L_n\left[\mathfrak{r}\,\mathrm{grad}\,V_n\right]=\mathfrak{M}\qquad(\mathrm{div}\,\mathfrak{M}=0,\quad M_r=0)$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{P}=\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{P}+\mathfrak{P}=-\,\mathfrak{r}(n+1)L_{n-1}V_n$$
$$+\left(L_{n+1}-(n+1)L_n\right)\mathrm{grad}\,V_n=\mathfrak{E}$$

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{P}=-(n+1)\cdot V_n L_n\qquad(\mathrm{div}\,\mathfrak{E}=0)$$

$$\left(E_r=-\frac{n(n+1)V_nL_n}{r}\right).$$

Ausgeschrieben lauten diese Lösungen:

$$E_{0r}=\frac{1}{r'^{\frac{3}{2}}}\cdot Z_{n+\frac{1}{2}}(r')\,Y_n(\vartheta,\varphi)$$

$$E_{0\varphi}=\frac{1}{n(n+1)\sqrt{r'}\cdot\sin\vartheta}\left(Z'_{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2r'}Z_{n+\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{\partial Y_n}{\partial\varphi}(\vartheta,\varphi)$$

$$E_{0\vartheta}=\frac{1}{n(n+1)\sqrt{r'}}\left(Z'_{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2r'}Z_{n+\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{\partial Y_n}{\partial\vartheta}(\vartheta,\varphi)$$

$$M_{0r}=0$$

$$M_{0\varphi}=\frac{-1}{n(n+1)\cdot\sqrt{r'}}Z_{n+\frac{1}{2}}(r')\frac{\partial Y_n}{\partial\vartheta}(\vartheta,\varphi)$$

$$M_{0\vartheta}=\frac{1}{n(n+1)\cdot\sin\vartheta\cdot\sqrt{r'}}Z_{n+\frac{1}{2}}(r')\frac{\partial Y_n}{\partial\varphi}(\vartheta,\varphi)\,.$$

c) Randwertaufgaben.

Ein weiteres Problem besteht darin, Lösungen zu finden, die gewisse „Randbedingungen" erfüllen. Diese bestehen z. B. darin, daß auf dem Rand, d. h. auf bestimmten Kurven bzw. Flächen V vorgeschrieben ist. Das übliche Verfahren ist dann folgendes: Man transformiert die gegebene Differentialgleichung auf solche Variablen, daß *eine* Variable q_r auf dem Rand konstant $= c$ wird und entwickelt das hier gegebene V nach solchen Funktionen der andern Variablen, wie sie in den partikulären Lösungen der Differentialgleichung für diese Variablen auftreten. Man stellt jetzt eine lineare Kombination von Partikularlösungen auf, setzt in ihr $q_r = c$ und wählt ihre Koeffizienten so, daß sie mit der Entwicklung von V für $q_r = c$ übereinstimmt; dann liefert sie (mit wieder variablem q_r) eine Lösung der Differentialgleichung und erfüllt für $q_r = c$ die Randbedingung.

Es ist wichtig zu bemerken, daß bei manchen Differentialgleichungen nicht beliebige Randbedingungen zu erfüllen sind, z. B. bei

der Gleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, welche eine Gleichung vom hyperbolischen Typus ist, im Gegensatz zu $\Delta V = 0$, die den elliptischen Typus besitzt.

Häufig ist es nötig (z. B. bei der Lösung von $\Delta V = 0$ für das Innere eines Rechtecks, wenn V auf der Berandung gegeben ist), die Lösung aus mehreren Teilen additiv aufzubauen, die so gewählt sind, daß die Randbedingungen jeweils nur auf einem Teil der Berandung erfüllt werden und auf dem übrigen Teil einfacheren Bedingungen (z. B. $V = 0$) genügen. In Weiterführung dieses Verfahrens gelangt man zu der Lösungsform:

$$V = \int d\xi_1 \, d\xi_2 \ldots G(\xi_i, x_i) \, V(\xi_i).$$

Hier bedeuten x_i die unabhängigen Variabeln der Differentialgleichung und ξ_i die Variabeln der Berandung. Die Integration ist über die Berandung zu erstrecken.

$G(\xi, x)$ spielt also die Rolle der *Greenschen* Funktion. Sie erfüllt für die Variable x die Differentialgleichung. Sie verschwindet für die Berandung außer im Punkt ξ und wird hier derart unendlich, daß $\int d\xi \, G(\xi, x) = 1$ wird. Die Schwierigkeit, eine solche Funktion $G(\xi, x)$ zu finden, ist aber in der Regel so groß, daß diese Lösungsform wesentlich nur theoretisches Interesse hat.

Im Falle einer linearen inhomogenen Differentialgleichung: $\Phi(V) = \varphi(x, y, \ldots)$, wo $\Phi(V)$ eine lineare Kombination von V und seinen Ableitungen mit von den unabhängigen Variabeln abhängigen Koeffizienten bedeutet, ist gleichfalls eine Lösung von der Form:

$$V = \int d\xi \, G(\xi, x) \, \varphi(\xi)$$

möglich. Hier ist die Integration über den ganzen Bereich zu erstrecken. Die *Greensche* Funktion $G(\xi, x)$ erfüllt als Funktion von x die homogene Gleichung, außer im Punkt $x = \xi$. Hier wird sie derart unendlich, daß $\int d\xi \, \Phi(G(\xi, x)) = 1$ wird.

Liegen Randbedingungen vor, so erfüllt man diese so weit wie möglich durch Lösungen der homogenen Gleichung. Es bleiben dann noch *homogene* Randbedingungen übrig, die von der Lösung der inhomogenen Gleichung zu erfüllen sind. Diesen letzteren muß dann auch die *Greensche* Funktion genügen.

Die Gleichung $\Phi(V) + \lambda V = 0$ hat häufig auch bei homogenen Randbedingungen von 0 verschiedene Lösungen für gewisse Werte von λ. Diese λ_i heißen dann „*Eigenwerte*" und die zu ihnen gehörenden Lösungen „*Eigenlösungen*".

d) Riemanns Integrationsmethode.

1. Es sei gegeben eine partielle Differentialgleichung vom hyperbolischen Typus:

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Setzt man $at = y$, so wird

$$(1') \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$\frac{\partial u}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial x}$ seien stetig. Wenn neben $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ auch noch $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ existiert und stetig ist, so lautet die allgemeinste Lösung:

$$(2) \qquad u = f_1(x+y) + f_2(x-y),$$

unter f_1 und f_2 willkürliche (zweimal stetig differenzierbare) Funktionen verstanden.

Randbedingung: Ist längs einer Kurve c im x, y-Diagramm $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ gegeben, so ist in einem Punkt x_1, y_1 die gesuchte Lösung $u(x_1, y_1)$ gegeben durch die längs der Kurve c erstreckten Integrale:

$$(3) \qquad 2 \cdot u(x_1, y_1) = \int_a^\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)(dx - dy) + \int_a^\beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)(dx + dy),$$

wobei als untere Grenze a ein beliebiger Punkt der Kurve c, als obere Grenze α und β aber die Schnittpunkte der Kurve c mit den beiden durch (x_1, y_1) unter 45^0 gehenden Geraden:

$$(4) \qquad \begin{cases} x - y = x_1 - y_1 \\ x + y = x_1 + y_1 \end{cases}$$

verstanden sind.

Über die Bestimmungskurve c ist dabei vorausgesetzt, daß sie von derartigen Geraden nur je einmal geschnitten wird. (Andernfalls wären die Werte $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ auf ihr nicht beliebig vorschreibbar.) Ist außer $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ zwischen α und β der Kurve c noch u selbst in α und β vorgeschrieben, so ist einfacher

$$(5) \qquad 2u(x_1, y_1) = u_\alpha + u_\beta + \int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy + \frac{\partial u}{\partial y} dx\right).$$

2. Es sei jetzt die Gleichung gegeben

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0.$$

Ihre Lösung im Punkte x_1, y_1 ist bei vorgeschriebenen Werten $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ auf einer Kurve c und vorgeschriebenen Werten u_α und u_β:

$$(7) \qquad 2u(x_1, y_1) = u_\alpha + u_\beta + \int_\alpha^\beta \left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x}\right) dy + \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx,$$

worin v eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung ist, nämlich

$$v = I_0(iz) \text{ (vgl. S. 63)}, \quad \text{wo } z = \sqrt{(y-y_1)^2 - (x-x_1)^2}$$

$$v = 1 + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^2 4^2} + \frac{z^6}{2^2 4^2 6^2} + \cdots,$$

also $v = 1$ auf den 45^0-Geraden.

Ist statt auf der Kurve c jetzt auf der Kurve $y = 0$ vorgeschrieben $u = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = F(x)$, so wird

$$2u(x_1, y_1) = f(x_1 - y_1) + f(x_1 + y_1) + y_1 \int_{x_1 - y_1}^{x_1 + y_1} \frac{1}{z}\frac{dv}{dz} f(x)\, dx + \int_{x_1 - y_1}^{x_1 + y_1} v F(x)\, dx \tag{8}$$

mit

$$\frac{1}{z}\frac{dv}{dz} = \frac{1}{2} + \frac{z^2}{2^2 \cdot 4} + \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \cdots$$

3. Es sei vorgelegt:

$$c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2b \frac{\partial U}{\partial t} \quad \text{(Telegraphengleichung).} \tag{9}$$

Wenn man setzt: $U = e^{-\frac{bt}{a^2}} \cdot u$, so wird

$$c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{b^2}{a^2} u$$

und setzt man ferner

$$x = \frac{ac}{b} X; \qquad t = \frac{a^2}{b} Y,$$

so wird

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + u = 0, \tag{10}$$

welche Gleichung nach (2) gelöst wird.

Literatur.

Horn: Gew. Differentialgleichungen und derselbe: Partielle Differentialgleichungen (Sammlung Schubert, Bd. 50 u. 60). — *Vallée-Poussin:* s. S. 24, Bd. II. — *Jordan:* Cours d'analyse (Gauthier-Villars). — *Riemann-Weber:* s. S. 75. — *Courant-Hilbert:* s. S. 12, u. a.

Siebenter Abschnitt.

Lineare Integralgleichungen.

Integralgleichungen 1. Art.

Allgemeine Form:

$$(1)\qquad f(s) = \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt,$$

wo f und K gegeben sind und φ die gesuchte Funktion ist[1]). K heißt der „Kern" der Integralgleichung. Diese Integralgleichung ist im allgemeinen, d. h. für beliebige Kerne und stetige $f(s)$ nicht durch stetiges $\varphi(t)$ lösbar. Falls $f(s)$ entwickelbar ist in der Form: $f(s) = \sum_i c_i \varphi_i(s)$, wo die φ_i Lösungen der Gleichung:

$$\varphi_i(s) = \lambda_i \int K(s, t)\,\varphi_i(t)\,dt,$$

also „*Eigenlösungen*" sind (s. u.), dann folgt die formale Lösung:

$$\varphi(t) = \sum_i c_i \lambda_i \varphi_i(t).$$

Die Konvergenz dieser Reihe muß natürlich geprüft werden.

Ist $K(s, t)$ *Greensche* Funktion eines Differentialausdrucks $\Phi(D)$, (vgl. S. 111), so folgt unmittelbar:

$$\varphi(s) = \Phi(D)\,f(s).$$

Integralgleichungen 2. Art.

Allgemeine Form:

$$(2)\qquad \varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Diese Integralgleichung ist äquivalent dem Grenzfall $\lim n = \infty$ des folgenden Systems von linearen Gleichungen:

$$(3)\qquad \varphi(\alpha_\varrho) = f(\alpha_\varrho) + \lambda \sum_{\nu=1}^{n} K(\alpha_\varrho, \alpha_\nu)\,\varphi(\alpha_\nu)\,(\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu);$$

$$\varrho = 1, 2, \ldots, n; \qquad a = \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n = b.$$

---

[1]) Die s und t bedeuten hier entweder gewöhnliche Variable, oder den Inbegriff der Variablen einer mehrdimensionalen Mannigfaltigkeit (Koordinaten eines Raumes, oder dgl.).

Bei dem Grenzübergang bleiben alle Eigenschaften des endlichen Systems erhalten. Es folgen hieraus viele Analogien zu den linearen Gleichungssystemen.

Fall 1. Die homogene Gleichung ($f(s) = 0$) besitze keine Lösung. Dann besitzt die inhomogene für jedes $f(s)$ eine und nur eine Lösung.

Fall 2. Die homogene Gleichung besitze eine oder mehrere linear unabhängige Lösungen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Dann besitzt auch die transponierte Gleichung:

$$(4) \qquad \varphi(s) = \lambda \int_a^b K(t, s)\, \varphi(t)\, dt$$

ebensoviel Lösungen $\varphi_1', \ldots, \varphi_n'$. Damit die inhomogene Gleichung lösbar wird, muß

$$(5) \qquad \int f(t)\, \varphi_h'(t)\, dt = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

sein.

Eigenwerte und Eigenfunktionen.

Die homogene Gleichung

$$(6) \qquad \varphi(s) = \lambda \int_a^h K(s, t)\, \varphi(t)\, dt \qquad (\text{d. h. } f(s) = 0)$$

besitzt im allgemeinen keine Lösung außer für gewisse ausgezeichnete Werte des Parameters λ, die *Eigenwerte* des Kerns.

Die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ bilden eine diskrete nirgends im Endlichen sich häufende Zahlenmenge. Sie können reell oder komplex sein. Die zugehörigen Lösungen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ heißen *Eigenfunktionen* des Kerns.

Zu einem Eigenwert gehören nur endlich viele voneinander unabhängige Eigenfunktionen (einfache und mehrfache Eigenwerte). Jede lineare Kombination von ihnen ist wieder eine Eigenfunktion. Sie lassen sich daher durch ein aus solchen Kombinationen gebildetes äquivalentes orthogonales System ersetzen.

Symmetrischer Kern.

$K(s, t) = K(t, s)$ (Orthogonale Integralgleichungen).

Bei symmetrischem reellen Kern liegen besonders einfache Verhältnisse vor:

1. Er besitzt immer Eigenwerte.
2. Alle Eigenwerte sind reell.
3. Zwei Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten sind zueinander orthogonal, d. h. es ist:

$$(7) \qquad \int \varphi_i(t)\, \varphi_k(t)\, dt = 0 . \qquad (i \neq k)$$

Sämtliche Eigenfunktionen des Kerns bilden daher ein orthogonales

System. Dazu gehört, daß der freibleibende Faktor der φ_i so normiert sei, daß

$$\int \varphi_i^2(t)\,dt = 1$$

wird.

Darstellung des symmetrischen Kerns durch Eigenwerte und Eigenfunktionen.

Es gilt die Bilinearformel:

$$K(s,t) = \sum_n \frac{\varphi_n(s)\,\varphi_n(t)}{\lambda_n}, \tag{8}$$

wenn die (über *alle* Eigenfunktionen zu erstreckende) Summe gleichmäßig konvergiert.

Auflösung der inhomogenen Gleichung mit Hilfe der Bilinearformel.

Wenn $\lambda \neq \lambda_n$ ist, konvergiert auch

$$\sum_n \frac{\varphi_n(s)\,\varphi_n(t)}{\lambda_n - \lambda} = \mathsf{K}(s,t). \tag{9}$$

$\mathsf{K}(s,t)$ heißt „lösender Kern". Er dient zur Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int \mathsf{K}(s,t) f(t)\,dt = f(s) + \lambda \cdot \sum_n \frac{\varphi_n(s)}{\lambda_n - \lambda} \int \varphi_n(t) f(t)\,dt. \tag{10}$$

Ist $\lambda = \lambda_n$, so gilt die Formel nur, wenn

$$\int \varphi_n(t) f(t)\,dt = 0$$

ist.

Auflösung der inhomogenen Gleichung durch die Neumannsche Reihe.

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int K(s,t) f(t)\,dt + \lambda^2 \iint K(s,t_1) K(t_1,t) f(t)\,dt_1\,dt + \lambda^3 \iiint K(s,t_2) K(t_2,t_1) K(t_1,t) f(t)\,dt_2\,dt_1\,dt + \ldots \tag{11}$$

Die Größen

$$\int K(s,t_1) K(t_1,t)\,dt_1 = K_2(s,t)$$

$$\int K_2(s,t_1) K(t_1,t)\,dt_1 = K_3(s,t)$$

usw. heiße „iterierte" Kerne. Es gilt

$$K_2(s,t) = \sum_n \frac{\varphi_n(s)\,\varphi_n(t)}{\lambda_n^2}, \tag{12}$$

falls die Summe gleichmäßig konvergiert, ebenso

$$K_3(s,t) = \sum_n \frac{\varphi_n(s)\,\varphi_n(t)}{\lambda_n^3} \tag{12'}$$

usw. Mit wachsender Iteration konvergieren die Bilinearformeln besser, bei stetigem Kern stets von K_4 ab.

Entwicklungssatz (Analogie zu *Fourierschen* Reihen).

Ist die Funktion $F(s)$ mit Hilfe einer anderen Funktion $G(s)$ darstellbar in der Form:

$$F(s) = \int K(s, t) G(t) dt, \tag{13}$$

so läßt sich $F(s)$ nach den Eigenfunktionen des Kerns entwickeln in einer gleichmäßig und absolut konvergenten Reihe:

$$F(s) = \sum_n c_n \varphi_n(s), \tag{14}$$

wo

$$c_n = \int F(t) \varphi_n(t) dt$$

ist. Dies folgt aus der Bilinearformel.

Literatur:

Courant-Hilbert: s. S. 12, Kap. III.

Achter Abschnitt.

Variationsrechnung.

Die Variationsrechnung stellt sich die Aufgabe, Funktionen $x, y, z, \ldots$ von $t, u, v, \ldots$ zu ermitteln, welche ein Integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2}\int_{u_1}^{u_2} \ldots V(t, u, v, \ldots, x, y, \ldots, x_t, x_u, \ldots)\, dt\, du \ldots \quad \left(x_t = \frac{\partial x}{\partial t}, \ldots\right)$$

zu einem Minimum oder Maximum machen. Dabei können die Grenzen fest oder auch variabel mit gewissen einschränkenden Bedingungen vorausgesetzt werden. Jedoch läßt sich der Fall variabler Grenzen auf den mit festen Grenzen zurückführen. Wir betrachten daher nur den Fall *fester* Grenzen. Die lösenden Funktionen unter den zur Konkurrenz zugelassenen Funktionen heißen *Extremalen*.

Verschiedene Formen der Integranden.

a) $V(x, \dot{x}, t)$ mit *einer* abhängigen Funktion $x(t)$ von *einer* unabhängigen t und deren Ableitung $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$. *Variieren* wir die Funktion $x(t)$, indem wir statt ihrer setzen

$$x(t) + \varepsilon \cdot \xi(t),$$

so wird die zugehörige Variation von S definiert durch:

$$\delta S = \varepsilon \cdot \frac{\partial S(x + \varepsilon\xi)}{\partial \varepsilon} = \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\, \dot{\xi} + \frac{\partial V}{\partial x}\, \xi\right) dt$$

oder durch partielle Integration des mit $\dot{\xi}$ behafteten Teils:

$$\delta S = \varepsilon \cdot \left[\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\, \xi\right]_{t_1}^{t_2} + \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \xi \cdot \left[\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right)\right].$$

Ist $x(t)$ für t_1 und t_2 vorgeschrieben, also dort $\xi = 0$, so fällt der erste Teil fort. Die erste notwendige Bedingung für ein Extremum von S, daß $\delta S = 0$ ist für alle zulässigen Funktionen ξ, hat zur Folge, daß

$$(1) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

sein muß (*Euler-Lagrangesche Differentialgleichung*). Sie bestimmt $x(t)$ bis auf zwei Integrationskonstanten, welche durch die Randbedingungen festgelegt sein müssen.

b) $V(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ldots, t)$ von *mehreren* (n) abhängigen Funktionen einer unabhängigen t. Hier wird $\delta S = 0$, wenn $x(t)$, $y(t), \ldots$ die Gleichungen

$$(2) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{y}}\right) = 0, \ldots$$

erfüllen. Das sind n Differentialgleichungen 2. Ordnung. Sie bestimmen $x(t), y(t), \ldots$ bis auf $2n$ Integrationskonstanten, die durch die Randbedingungen festgelegt sein müssen.

c) $V(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, t)$ von *einer* abhängigen Funktion und ihren Ableitungen bis zur 3. Ordnung. Hier wird

$$\delta S = \varepsilon\left[\xi\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \ddot{x}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial V}{\partial \dddot{x}}\right) + \dot{\xi}\left(\frac{\partial V}{\partial \ddot{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dddot{x}}\right) + \ddot{\xi}\frac{\partial V}{\partial \dddot{x}}\right]_{t_1}^{t_2}$$

$$+ \varepsilon\int_{t_1}^{t_2}\xi\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial V}{\partial \ddot{x}} - \frac{d^3}{dt^3}\frac{\partial V}{\partial \dddot{x}}\right)dt.$$

δS wird also gleich Null, wenn außer $x(t)$ auch $\dot{x}$ und $\ddot{x}$ für t_1 und t_2 vorgeschrieben sind und die Gleichung

$$(3) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial V}{\partial \ddot{x}} - \frac{d^3}{dt^3}\frac{\partial V}{\partial \dddot{x}} = 0$$

erfüllt ist.

d) $V(t, u, \ldots, x, y, \ldots, x_t, x_u, \ldots, y_t, y_u, \ldots)$. *Mehrere* unabhängige: $t, u, \ldots$, mehrere abhängige: $x, y, \ldots$, und deren Ableitungen: x_t, $y_t, \ldots$. δS wird gleich Null, wenn $x(t, u, \ldots)$ usw. bestimmt werden aus den *Lagrangeschen* Gleichungen:

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial V}{\partial x_t}\right) - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial V}{\partial x_u}\right) - \ldots = 0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} - \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial V}{\partial y_t}\right) - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial V}{\partial y_u}\right) - \ldots = 0 \end{cases}$$

usw.

Nebenbedingungen.

Sind zu dem Problem $\iint V\,dt\,du =$ Extremum noch Nebenbedingungen gegeben in der Form $\iint G\,dt\,du = \text{Const}$, $\iint H\,dt\,du = \text{Const}, \ldots$, so ist in den *Lagrangeschen* Gleichungen V durch $V + \lambda G + \mu H + \ldots$ zu ersetzen. Die *Lagrangeschen* Faktoren $\lambda, \mu, \ldots$ sind nachträglich aus den Rand- und Nebenbedingungen zu bestimmen.

1. Beispiel. $\int_0^1 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt =$ Extremum, Nebenbedingung $\int_0^1 x^2\,dt = C$,

Randbedingung $x(0) = x(1) = 0$. Die *Lagrangesche* Gleichung heißt für $V - \lambda G = \dot{x}^2 - \lambda x^2$ jetzt $\ddot{x} + \lambda x = 0$. Ihre Lösung ist

$$x = A \sin(\sqrt{\lambda}\, t + \alpha).$$

Aus der Randbedingung $x(0) = 0$ folgt $\alpha = 0$, aus $x(1) = 0$ folgt $\sqrt{\lambda} = n\pi$, d. h. λ kann nur die Werte $\lambda_n = n^2 \pi^2$ annehmen. A bestimmt sich aus der Nebenbedingung zu $\frac{A^2}{2} = C$, also ist die Lösung:

$$x = \pm \sqrt{2C} \sin(n\pi t), \quad \lambda_n = n^2 \pi^2.$$

2. Beispiel. $\iint \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy =$ Extremum ohne Nebenbedingungen hat die *Lagrangesche* Gleichung $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 = \Delta \varphi$. Kommt noch die Nebenbedingung $\iint \varphi^2\, dx\, dy =$ Const hinzu, so heißt die *Lagrangesche* Gleichung für $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 - \lambda \varphi^2$ jetzt $\Delta \varphi + \lambda \varphi = 0$. Soll hierbei $\varphi = 0$ auf der Randkurve sein, so ist eine Lösung, ähnlich wie im ersten Beispiel, nur für gewisse diskrete Werte von λ möglich, nämlich für die „Eigenwerte" λ_n, welche stets positiv $\lambda = k^2$ sind. Die zugehörigen Lösungen $\varphi(x, y)$, die „Eigenfunktionen" $\varphi_n(x, y)$ erfüllen die Orthogonalitätsbedingungen

$$\iint \varphi_n \cdot \varphi_m\, dx\, dy = 0 \qquad (n \neq m)$$

und mögen normiert sein durch

$$\iint \varphi_n^2\, dx\, dy = 1$$

als Nebenbedingung. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist also äquivalent der Lösung eines Variationsproblems. Oft ist letzteres, wenigstens näherungsweise, leichter zu lösen als ersteres, so daß man auf dem Umweg über ein Variationsproblem die Lösung von Differentialgleichungen erhält, z. B. durch die

Ritzsche Methode. Diese soll an dem obigen Beispiel 1 auseinandergesetzt werden. Vorgelegt ist also

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda x = 0,$$

mit Randbedingung $x(0) = x(1) = 0$. Dies ist nach Beispiel 1 äquivalent mit

$$\int_0^1 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt = \text{Extremum}, \quad \int_0^1 x^2\, dt = C, \quad x(0) = x(1) = 0.$$

Wir nehmen eine Folge von später zu bestimmenden Funktionen $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ und Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ und machen den Ansatz

$$x(t) = \sum_1^n c_p f_p(t).$$

Dadurch geht das Variationsproblem über in das neue Problem

$$\sum_1^n \sum_1^n c_p c_q A_{pq} = \text{Extremum}, \quad \sum_1^n \sum_1^n c_p c_q B_{pq} = C,$$

wobei

$$A_{pq} = \int_0^1 f_p'(t) f_q'(t)\, dt, \quad B_{pq} = \int_0^1 f_p(t) \cdot f_q(t)\, dt.$$

Die Lösung des neuen Problems (Bestimmung der c_p) erhält man aus dem linearen Gleichungssystem

$$\sum_p c_p (A_{pq} - l B_{pq}) = 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots, n)$$

wo l ein später zu bestimmender *Lagrangescher* Faktor ist. Jetzt nehmen wir für $f_1, f_2, \ldots, f_n$ speziell die Funktionen

$$f_1 = C_1, \quad f_2 = C_2 + C_2' x, \quad f_3 = C_3 + C_3' x + C_3'' x^2, \ldots$$

und verlangen, daß jede dieser Funktionen f_p für sich die Randbedingungen $x(0) = x(1) = 0$ erfüllen sollen. Daraus folgt zunächst

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \ldots$$

und

$$C_2' = 0, \quad C_3' + C_3'' = 0, \ldots$$

also

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = C_3' x + C_3'' x^2 \text{ bei } C_3' + C_3'' = 0, \text{ usw.}$$

Wir fügen noch die Orthogonalitäts- und Normierungsbedingungen hinzu:

$$\int_0^1 f_p(t) f_q(t)\, dt = 0 \text{ für } p \neq q.$$

$$\int_0^1 f_p^2(t)\, dt = B_{pp} = 1, \text{ falls nicht } f_p(t) = 0.$$

Daraus folgt

$$f_3 = t(1-t)\sqrt{30}, \quad f_3' = \sqrt{30}(1-2t) \text{ usw.}$$

Begnügen wir uns mit *drei* Gliedern, also

$$x(t) = \sum_1^3 c_p f_p(t) = c_3 f_3(t) = c_3 \sqrt{30}\, t(1-t),$$

so wird das lineare Gleichungssystem

$$c_3(l - A_{33}) = 0, \quad \text{also} \quad l = A_{33}.$$

$$l = \int_0^1 f_3'^2\, dt = 30 \int_0^1 (1 - 4t + 4t^2)\, dt = 10.$$

Da

$$0 = A_{11} = A_{12} = A_{13} = A_{22} = A_{23} = B_{11} = B_{12} = B_{13} = B_{22} = B_{23} = 0,$$

folgt aus der Nebenbedingung noch

$$C = \int_0^1 x^2\,dt = c_3^2 \int_0^1 f_3^2(t)\,dt = c_3^2 \cdot 1,$$

also $c_3 = \pm\sqrt{C}$ und schließlich

$$x = \pm\sqrt{2C}\cdot t(1-t)\sqrt{15}, \qquad l = 10,$$

statt der genauen in Beispiel 1 ermittelten Funktion:

$$x = \pm\sqrt{2C}\cdot\sin(\pi t), \qquad \lambda_1 = \pi^2.$$

Benutzt man statt nur der *einen* nicht verschwindenden Funktion $f_3(t)$ auch noch $f_4(t)$, so wird das lineare Gleichungssystem auf 2 Gleichungen reduziert und man erhält 2 Lösungen $l_1^{(2)}$ und $l_2^{(2)}$, welche nahe bei $\lambda_1 = \pi^2$, $\lambda_2 = (2\pi)^2$ liegen, wobei $l_1^{(2)}$ noch näher an π^2 liegt als obiges $l = l_1^{(1)} = 10$. x wird dann durch eine Kurve 3. Grades noch besser an $\sqrt{2C}\sin\pi t$ und $\sqrt{2C}\sin 2\pi t$ approximiert als in obiger erster Näherung.

Äquivalenz von Variationsproblemen mit Integralgleichungen. $\int\int K(x, y)\varphi(x)\varphi(y)\,dx\,dy =$ Extremum, $\int \varphi^2(t)\,dt = 1$, $\varphi = 0$ am Rand hat dieselben Eigenwerte λ und Lösungen $\varphi(t)$ als Eigenfunktionen wie die homogene Integralgleichung

$$\varphi(x) - \lambda \int\int K(x, y)\varphi(y)\,dy = 0.$$

Literatur:

Courant-Hilbert: s. S. 12, Kap. IV u. a.

Neunter Abschnitt.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

A. Grundbegriffe.

1. Wenn unter gewissen Bedingungen *ein* Ereignis unter einer Auswahl von N Ereignissen $a_1 a_2 \ldots a_N$ eintreten muß, und kein Grund vorliegt, warum irgendeins derselben leichter eintreten sollte als ein anderes, so heißt der Bruch $\frac{1}{N}$ die *„Wahrscheinlichkeit"* für das Eintreten eines jeden dieser Ereignisse.

Die Beobachtung eines solchen Ereignisses heißt eine *„Probe"*.

2. Bezeichnet man als *„günstiges Ereignis"* das Eintreten *eines beliebigen* Ereignisses aus einer bestimmten Gruppe der a, bestehend aus n ($n \leqq N$) Elementen, so heißt der Bruch $p = \frac{n}{N}$ die „Wahrscheinlichkeit" für das Eintreten dieses „günstigen Ereignisses".

3. Sind mehrere solcher Gruppen gegeben, die sich gegenseitig ausschließen, so daß also kein a in mehr als einer Gruppe vorkommt, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten irgendeines beliebigen Ereignisses aus irgendeiner der gegebenen Gruppen gleich der *Summe* der Einzelwahrscheinlichkeiten

$$W\,(\text{entweder} - \text{oder} - \text{oder}) = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots.$$

Enthalten die Gruppen zusammen alle möglichen Ereignisse $a_1 a_2 \ldots a_N$, so ist $\sum p_i = 1$.

4. Sind $a_1{}' a_2{}' \ldots a_n{}'$ Ereignisse, die wie die a charakterisiert und von diesen unabhängig sind, und ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines bestimmten Ereignisses $a_0{}'$ gleich $p_0{}'$, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sowohl das Ereignis a_0 als auch das Ereignis $a_0{}'$ eintritt, gleich dem *Produkt* der Einzelwahrscheinlichkeiten

$$W\,(\text{sowohl } a_0 \text{ als auch } a_0{}') = p_0 \cdot p_0{}',$$

allgemein:

$$W\,(\text{sowohl} - \text{als auch} - \text{als auch} \ldots) = p^{(1)} \cdot p^{(2)} \cdot p^{(3)} \ldots.$$

Die zweite Probe kann dabei eine Wiederholung der ersten unter denselben äußeren Bedingungen zu einer anderen Zeit sein, oder

auch in einem verschiedenen Vorgang zu gleicher oder anderer Zeit bestehen.

5. Wenn bei N unabhängigen Proben 1, 2, ..., N die Wahrscheinlichkeit für das Einsetzen eines günstigen Ereignisses jedesmal gleich p ist, und fallen von den N Proben in Wirklichkeit n günstig aus, so wird $\left|\frac{n}{N} - p\right|$ mit wachsendem N beliebig klein. Für die Wahrscheinlichkeit $W(n)$, daß bei diesen N Proben n mal ein günstiges Ereignis eintritt, gilt die „*Newtonsche* Formel“:

$$W(n) = \binom{N}{n} p^n \cdot q^{N-n}, \tag{1}$$

wo $q = 1 - p$ bedeutet.

Für den Grenzfall sehr großer N geht diese Formel über in

$$W(n) = \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{2\pi N p q}}; \quad \text{worin} \quad z = \frac{n - Np}{\sqrt{2Npq}} \quad (\textit{Laplace}). \tag{2}$$

Ist N auch sehr groß gegen Np, so wird

$$W(n) = \frac{e^{-Np}(Np)^n}{n!} \qquad (\textit{Poisson}). \tag{3}$$

6. Wiederholt man die Serie von N Proben, so wird sich jedesmal ein anderes n ergeben. Der Mittelwert $\bar{n}$ wird im Grenzfall unendlichfacher Wiederholung der Serie $\bar{n} = N \cdot p$ (*Bernoulli*).

B. Schwankungen.

1. Man bezeichnet die Größen

$$s = n - \bar{n}, \qquad \delta = \frac{n - \bar{n}}{\bar{n}}$$

als absolute bzw. relative *Schwankung*. Die „durchschnittliche absolute Schwankung“ ist

$$|\bar{s}| = 2\, W(\nu) \cdot \left(\bar{n} - \frac{\nu \bar{n}}{N}\right), \tag{1}$$

worin ν die größte ganze Zahl $\leqq \bar{n}$ ist und $W(\nu)$ die Wahrscheinlichkeit ist, daß bei N Proben ν mal das Ereignis a eintritt; die „durchschnittliche *relative* Schwankung“ wird daher

$$|\bar{\delta}| = \frac{|\bar{s}|}{\bar{n}} = 2\, W(\nu) \cdot \left(1 - \frac{\nu}{N}\right). \tag{2}$$

Die „mittlere absolute Schwankung“ $\sqrt{\overline{s^2}}$ wird gegeben durch

$$\overline{s^2} = Npq = \bar{n} q, \tag{3}$$

die „mittlere *relative* Schwankung" $\sqrt{\overline{\delta^2}}$ daher

(4) $$\overline{\delta^2} = \frac{1}{\bar{n}} - \frac{1}{N} = \frac{q}{\bar{n}}$$

2. Die durchschnittliche Abweichung der verschiedenen Werte n von einem bestimmt vorgegebenen n_1 ist

(5) $$|\overline{n_1 - n}| = n_1 - \bar{n}.$$

Die „mittlere Abweichung" zweier aufeinander folgender Proben ist gegeben durch

(6) $$\overline{(n_i - n_k)^2} = 2\overline{s^2} = 2\bar{n}^2\overline{\delta^2} = 2\bar{n}q.$$

3. Ist $p \ll 1$. $N \gg 1$, $p \cdot N = \bar{n}$ endlich, so gilt die *Poissonsche Formel:*

(7) $$W(n) = \frac{e^{-\bar{n}} \cdot \bar{n}^n}{n!}.$$

In diesem Falle ist die mittlere absolute bzw. relative Schwankung bestimmt durch

(8) $$\overline{s^2} = \bar{n}$$
$$\overline{\delta^2} = \frac{1}{\bar{n}}.$$

4. Sowohl N als auch $\bar{n}$ seien so groß, daß man δ als kontinuierlich veränderlich ansehen kann, ohne daß $p \ll 1$ ist. Dann gilt das *Gaußsche Fehlergesetz*: Es ist die Wahrscheinlichkeit, daß für δ ein Wert zwischen δ und $\delta + d\delta$ gefunden wird

(9) $$W(\delta)\,d\delta = \sqrt{\frac{\bar{n}}{2\pi q}} \cdot e^{-\frac{\bar{n}}{2q}\delta^2}\,d\delta.$$

In diesem Falle ist die durchschnittliche Schwankung:

(10) $$|\bar{\delta}| = 2\int_0^\infty \delta \cdot W(\delta)\,d\delta = \sqrt{\frac{2 \cdot q}{\pi \bar{n}}};$$

und die mittlere Schwankung $\sqrt{\overline{\delta^2}}$ bestimmt durch:

(11) $$\overline{\delta^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^2 \cdot W(\delta)\,d\delta = \frac{q}{\bar{n}}.$$

Das Fehlergesetz läßt sich also auch schreiben:

$$W(\delta)\,d\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\delta^2}}} \cdot e^{-\frac{\delta^2}{2\overline{\delta^2}}} \cdot d\delta.$$

Es wird ferner der Quotient

(12) $$\frac{|\overline{\delta}|}{\sqrt{\overline{\delta^2}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}};$$

für das Verhältnis der „absoluten“ Schwankungen gilt dasselbe.

5. Ist außerdem $p \ll 1$, so ist in den Formeln überall $q = 1$ zu setzen. Speziell wird dann

(13) $$|\overline{\delta}| = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$$

$$\overline{\delta^2} = \frac{1}{n}.$$

Zeigt sich bei Versuchen, Statistiken usw., daß tatsächlich $\overline{s^2} = \overline{n}$ ist, so sagt man: es liegt „*normale Dispersion*“ vor,

ist $\overline{s^2} > \overline{n}$, so hat man „*übernormale*“,

ist $\overline{s^2} < \overline{n}$, so hat man „*unternormale*“ Dispersion.

Die Ursachen für solche Abweichungen liegen in der nicht erfüllten Unabhängigkeit der Proben.

C. Mittelwertbildung.

Ist die Wahrscheinlichkeit $W(n)$ eines durch $f(n)$ charakterisierten Zustandes bekannt, so ist der Mittelwert

(1) $$\overline{f(n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(n)\, W(n)\, dn.$$

Der Mittelwert der Funktion in einem bestimmten Intervall $a < n < b$ ist:

(2) $$\overline{f(n)}^{a-b} = \frac{\int_a^b f(n) W(n)\, dn}{\int_a^b W(n)\, dn}.$$

D. Wahrscheinlichkeitsnachwirkung.

Folgen Serien von Proben im Zeitabstand τ aufeinander, so sind in vielen praktischen Fällen die Zahlen n der günstig ausfallenden Proben in einer Serie nicht unabhängig von dem Ausfall der Proben der vorhergehenden Serie.

Besonders einfach und wichtig ist der Fall:

(1) $$N \gg 1; \quad p \ll 1; \quad pN = n \text{ endlich.}$$

Dann wird:

(2) $$\overline{n_i - n_{i+1}} = P(n_i - n) \quad \text{und} \quad \overline{(n_i - n_{i+1})^2} = 2Pn.$$

Hierbei bedeuten n_i und n_{i+1} die n für zwei einander folgende Serien und P eine Konstante < 1, die von den Bedingungen des Versuches und dem Zeitabstand τ der Serien abhängt, und mit steigendem τ bis 1 anwächst.

Alle anderen Schwankungsformeln bleiben ungeändert.

Literatur:

Markoff: Wahrscheinlichkeitsrechnung (Leipzig: B. G. Teubner). — *Poincaré:* Calcul de probabilité (Gauthier-Villars). — *Fürth:* Schwankungserscheinungen. — *Lorentz:* Theorie statistiques (Leipzig: B. G. Teubner). — *Czuber, W. R.:* Wahrscheinlichkeitsrechnung (Leipzig: B. G. Teubner). — *Planck:* Wärmestrahlung (Leipzig: J. A. Barth) u. a.

Zehnter Abschnitt.

Vektoranalysis.

A. Koordinatenfreie Formulierung der Vektoranalysis.

1. Definitionen.

Die Vektoranalysis beschäftigt sich mit Skalaren, Vektoren und Tensoren.

1. Ein *Skalar* ist eine Funktion des Ortes, die jedem Punkt einen Betrag (Zahl) zuordnet.

2. Ein *Vektor* ist eine Funktion des Ortes, die jedem Punkt einen Betrag und eine Richtung zuordnet.

3. Ein *Tensor* (2. Grades) ist eine Funktion des Ortes, die jedem Vektor in einem Punkte daselbst einen andern Vektor zuordnet. Ein Tensor höheren Grades ordnet ebenso jedem Vektor einen Tensor nächstniedern Grades zu.

Diese Funktionen können neben ihrer Abhängigkeit vom Ort noch andere Parameter, wie z. B. die Zeit, enthalten.

Sind die Funktionen für jeden Punkt des Raumes definiert, so spricht man von *Skalarfeldern, Vektorfeldern, Tensorfeldern* bzw. *Feldvektoren* usw.

Sind die Funktionen nur in Punkten, Linien, Flächen definiert, so hat man *Punkt-, Linien-, Flächenvektoren* usw.

Sind die Funktionen vom Ort unabhängig, so werden die Skalare, Vektoren, Tensoren im folgenden als „frei" bezeichnet.

Ein in einem Punkte definierter Vektor kann in einen anderen unter Erhaltung von Betrag und Richtung *verpflanzt* werden. Analoges gilt für Tensoren.

Vektoren, deren Betrag überall $= 1$ ist, heißen *Einheitsvektoren*. Der Betrag eines Vektors ist ein Skalar.

Bezeichnung: Im folgenden sind meistens bezeichnet:

Skalare durch griechische Buchstaben, z. B. φ,
Vektoren durch deutsche Buchstaben, z. B. $\mathfrak{a}$,
Einheitsvektoren durch den Index $_1$, z. B. $\mathfrak{a}_1$,
Tensoren durch große deutsche Buchstaben, z. B. $\mathfrak{T}$.

Der Betrag eines Vektors $\mathfrak{a}$ wird durch den gleichlautenden lateinischen Buchstaben a bezeichnet. Auch die Bezeichnungsweise $|\mathfrak{a}|$ ist gebräuchlich.

2. Vektoralgebra.

Unter der *Summe zweier Vektoren* $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ versteht man den Vektor

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b},$$

dessen Richtung und Betrag an jeder Stelle von den Summanden in derselben Weise abhängt, wie die Diagonale eines Parallelogramms von den Seiten, die mit ihr von derselben Ecke auslaufen. Hiernach gilt für die Summation von Vektoren das *kommutative* Gesetz:

(1) $$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a},$$

sowie das *assoziative Gesetz:*

(2) $$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}).$$

Der Begriff der Subtraktion folgt durch Umkehrung

(3) $$\mathfrak{a} = \mathfrak{c} - \mathfrak{b}; \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{c} - \mathfrak{a}.$$

Unter dem *Produkt* $\mathfrak{a}\varphi$ eines Vektors $\mathfrak{a}$ und eines Skalars φ versteht man den Vektor mit dem Betrage $a\varphi$ und der Richtung von $\mathfrak{a}$. Es ist also $\mathfrak{a} = a\mathfrak{a}_1$.

Als *Produkt zweier Vektoren* $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bezeichnet man zwei verschiedene Größen:

a) das *innere Produkt* (auch skalares Produkt genannt). Dies ist ein Skalar, dessen Betrag

(4) $$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = a \cdot b \cdot \cos\varphi$$

ist, d. h. gleich dem Produkt der Beträge der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, multipliziert mit dem Kosinus des Winkels zwischen ihren Richtungen. Daher ist $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{b}\mathfrak{a})$ (kommutatives Gesetz);

b) das *äußere Produkt* (auch Vektorprodukt genannt) $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$. Dies ist ein Vektor, dessen Richtung senkrecht steht auf der durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gelegten Ebene und dessen Betrag gleich

(5) $$|[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]| = a \cdot b \cdot \sin\varphi$$

ist. Der Richtungssinn ergibt sich durch die Festsetzung, daß die Richtungen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$ hintereinander gesetzt eine Rechtsschraube bilden.

Daher ist

(6) $$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = -[\mathfrak{b}\mathfrak{a}].$$

Es gelten folgende Regeln:

(7) $$[\mathfrak{a}\mathfrak{a}] = 0; \quad (\mathfrak{a}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]) = 0.$$

(8) $$\left.\begin{aligned} (\mathfrak{a}\mathfrak{b}) + (\mathfrak{a}\mathfrak{c}) &= (\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c})) \\ [\mathfrak{a}\mathfrak{b}] + [\mathfrak{a}\mathfrak{c}] &= [\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c})] \end{aligned}\right\} \text{ distributives Gesetz.}$$

(9) $$\left\{\begin{aligned} (\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}]) &= (\mathfrak{b}[\mathfrak{c}\mathfrak{a}]) = (\mathfrak{c}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]) \\ [\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}]] &= \mathfrak{b}(\mathfrak{a}\mathfrak{c}) - \mathfrak{c}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \\ ([\mathfrak{a}\mathfrak{b}][\mathfrak{c}\mathfrak{b}]) &= (\mathfrak{c}[\mathfrak{b}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]]) = (\mathfrak{a}\mathfrak{c})(\mathfrak{b}\mathfrak{b}) - (\mathfrak{b}\mathfrak{c})(\mathfrak{a}\mathfrak{b}). \end{aligned}\right.$$

Es ist ferner

$$(10) \qquad (\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}])(\mathfrak{e}[\mathfrak{f}\mathfrak{g}]) = \begin{vmatrix} (\mathfrak{a}\mathfrak{e})(\mathfrak{a}\mathfrak{f})(\mathfrak{a}\mathfrak{g}) \\ (\mathfrak{b}\mathfrak{e})(\mathfrak{b}\mathfrak{f})(\mathfrak{b}\mathfrak{g}) \\ (\mathfrak{c}\mathfrak{e})(\mathfrak{c}\mathfrak{f})(\mathfrak{c}\mathfrak{g}) \end{vmatrix}$$

und daraus

$$(\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}])^2 = a^2 b^2 c^2 - a^2(\mathfrak{b}\mathfrak{c})^2 - b^2(\mathfrak{a}\mathfrak{c})^2 - c^2(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^2 + 2(\mathfrak{a}\mathfrak{b})(\mathfrak{b}\mathfrak{c})(\mathfrak{a}\mathfrak{c}).$$

Der Betrag eines Vektors $\mathfrak{a}$ ist

$$(11) \qquad a = \sqrt{(\mathfrak{a}\mathfrak{a})}.$$

Er ist immer positiv zu rechnen.

3. Integral- und Differentialausdrücke.

a) Skalare Integrale.

Als *Linienintegral* eines Vektors längs einer Kurve bezeichnet man die Größe

$$\int (\mathfrak{a}\, d\mathfrak{s}) = \int (\mathfrak{a}\mathfrak{s}_1)\, ds,$$

wo $\mathfrak{s}_1$ ein Einheitsvektor ist, dessen Richtung gleich der des Kurvenelementes $d\mathfrak{s}$ ist. $(\mathfrak{a}\mathfrak{s}_1)$ wird auch in der Form a_s geschrieben, also das Linienintegral $\int a_s\, ds$.

Als *Flächenintegral* bezeichnet man die Größe

$$\int (\mathfrak{a}\mathfrak{n}_1)\, df,$$

wo $\mathfrak{n}_1$ ein Einheitsvektor ist, dessen Richtung senkrecht zu dem Flächenelement df steht. Statt $(\mathfrak{a}\mathfrak{n}_1)$ schreibt man auch a_n, also für das Flächenintegral $\int a_n\, df$.

b) Abgeleitete Vektoren und Skalare.

Der Differentialquotient $\frac{d\varphi}{ds}$ eines Skalars φ längs einer Geraden ist im allgemeinen eine Funktion der Richtung der Geraden und erreicht einen Maximalwert für eine bestimmte Richtung derselben.

grad φ ist ein Vektor, dessen Betrag gleich dem Maximalwert von $\frac{d\varphi}{ds}$ ist und dessen Richtung in die dazu gehörige Richtung fällt.

Daher gilt:

$$d\varphi = (d\mathfrak{s}\, \mathrm{grad}\, \varphi).$$

Läßt man in dem Ausdruck $\frac{\int a_n\, df}{V}$, wo das Integral über eine geschlossene Fläche um das Volumen V erstreckt ist, V zur Grenze 0 übergehen, so bezeichnet man den Grenzwert als div $\mathfrak{a}$.

div $\mathfrak{a}$ ist ein Skalar.

Läßt man in dem Ausdruck $\frac{\int a_s ds}{F}$, wo das Integral über eine geschlossene Kurve vom Inhalt F erstreckt ist, F zur Grenze 0 übergehen, so wird der Wert eine Funktion der Richtung der Normalen von F.

rot $\mathfrak{a}$ ist ein Vektor, dessen Betrag gleich dem *Maximum* unter allen bei verschiedenen Richtungen von F auftretenden Grenzwerten ist und dessen Richtung senkrecht auf der zugehörigen Lage von F steht, so, daß der Umlaufsinn $\int ds$ und rot $\mathfrak{a}$ eine Rechtsschraube bilden. Aus diesen Definitionen ergeben sich folgende Sätze:

c) Integralsätze.

Gaußscher Satz:

(1) $$\int df a_n = \int dv \operatorname{div} \mathfrak{a}.$$

Das erste Integral ist über eine geschlossene Fläche, das zweite über das von ihr umschlossene Volumen zu erstrecken. Der Vektor $\mathfrak{n}_1$ in $a_n = (\mathfrak{a}\mathfrak{n}_1)$ ist nach außen gerichtet.

Stokesscher Satz:

(2) $$\int ds a_s = \int df \operatorname{rot}_n \mathfrak{a}, \qquad [\operatorname{rot}_n \mathfrak{a} = (\mathfrak{n}_1 \operatorname{rot} \mathfrak{a})].$$

Das erste Integral ist über eine geschlossene Kurve, das zweite über *irgendeine* durch die Kurve umschlossene Fläche zu erstrecken.

Greenscher Satz: Wendet man den *Gaußschen* Satz auf den Vektor $\psi \operatorname{grad} \varphi$ an, so erhält man

(3) $$\int df \psi \operatorname{grad}_n \varphi = \int dv [\psi \Delta \varphi + (\operatorname{grad} \psi \operatorname{grad} \varphi)]. \quad (\textit{Greenscher}\ \text{Satz.})$$

(Betreffs der Bedeutung des Symbols $\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$ vgl. S. 156.)

Hieraus folgt die weitere nützliche Formel:

(4) $$\int df (\psi \operatorname{grad}_n \varphi - \varphi \operatorname{grad}_n \psi) = \int dv (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi).$$

Folgende *Spezialfälle* sind von Bedeutung:

1. $\psi = 1$.

(5) $$\int df \operatorname{grad}_n \varphi = \int dv \Delta \varphi.$$

2. $\psi = \frac{1}{r}$. Dann ist $\Delta \psi = 0$, außer für $r = 0$. Man erhält:

(6) $$\int df \left(\frac{1}{r} \operatorname{grad}_n \varphi - \varphi \operatorname{grad}_n \frac{1}{r}\right) = \int dv \left(\frac{1}{r} \Delta \varphi\right) - \int dv \left(\varphi \Delta \frac{1}{r}\right).$$

Das letzte Integral ist $= 0$, wenn die begrenzende Fläche den Punkt $r = 0$ ausschließt. Umfaßt sie ihn, so wird

(7) $$\int dv \left(\varphi \Delta \frac{1}{r}\right) = -4\pi\varphi_0,$$

wo φ_0 den Wert von φ im Nullpunkt bedeutet. Man erhält also, wenn die Fläche den Nullpunkt umschließt,

$$(8) \qquad 4\pi\varphi_0 = -\int dv \frac{\Delta\varphi}{r} + \int df\left(\frac{1}{r}\operatorname{grad}_n \varphi - \varphi \operatorname{grad}_n \frac{1}{r}\right).$$

2a. $\varphi = 1$ ergibt:

$$(9) \qquad \int dv \Delta\left(\frac{1}{r}\right) - \int df \operatorname{grad}_n\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \text{ bzw. } = -4\pi,$$

je nachdem das Volumen und die Fläche den Nullpunkt ausschließt oder einschließt.

3. $\psi = \frac{e^{ikr}}{r}$, dann ist $\Delta\psi = -k^2\psi$ außer für $r = 0$. Gilt für φ überall die Gleichung $\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$, so wird

$$\int df\left(\frac{e^{ikr}}{r}\operatorname{grad}_n \varphi - \varphi \cdot \operatorname{grad}_n\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right) = 4\pi\varphi_0 \text{ bzw. } = 0,$$

je nachdem der Punkt $r = 0$ von der Fläche umschlossen wird oder nicht.

d) Vektorielle Integrale.

Im Gegensatz zu der ungerichteten Größe $\int a_s\, ds$ kann man auch $\int \mathfrak{a}\, ds$ bilden.

Unter $\int \mathfrak{a}\, ds$ versteht man den Vektor, der durch Summation der Vektordifferentiale $\mathfrak{a}\, ds$ längs einer Kurve entsteht (nachdem sie alle durch Parallelverschiebung in einem Punkt vereinigt sind). Analog bildet man $\int \mathfrak{a}\, df$ und $\int \mathfrak{a}\, dv$. Diese Vektoren sind keinem bestimmten Orte zugeordnet, also freie Vektoren.

Es gilt für eine geschlossene Fläche

$$(10) \qquad \int dv \operatorname{grad} \varphi = -\int df \varphi \mathfrak{n}_1$$

und für eine geschlossene Kurve

$$(11) \qquad \int d\mathfrak{s}\, \varphi = \int ds\, \varphi \mathfrak{s}_1 = -\int df [\operatorname{grad} \varphi, \mathfrak{n}_1].$$

4. Allgemeine Formeln.

Es gilt allgemein:

$$(1) \qquad \operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = 0$$

$$(2) \qquad \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathfrak{a}) = 0$$

ferner:

$$(3) \qquad \operatorname{div}(\varphi\mathfrak{a}) = \varphi \operatorname{div} \mathfrak{a} + (\mathfrak{a} \operatorname{grad} \varphi)$$

$$(4) \qquad \operatorname{rot}(\varphi\mathfrak{a}) = \varphi \operatorname{rot} \mathfrak{a} - [\mathfrak{a} \operatorname{grad} \varphi]$$

$$(5) \qquad \operatorname{div}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = \mathfrak{b} \operatorname{rot} \mathfrak{a} - \mathfrak{a} \operatorname{rot} \mathfrak{b}.$$

Die Größe $\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi)$ wird mit $\Delta\varphi$ bezeichnet.

Es lassen sich schließlich noch folgende nützliche Vektoren ableiten:

$$(6)\qquad \Delta\mathfrak{a} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathfrak{a}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathfrak{a})$$

$$(7)\qquad \left\{ \begin{aligned} (\mathfrak{b}\operatorname{grad})\mathfrak{a} = \tfrac{1}{2}(&\operatorname{rot}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] + \operatorname{grad}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) - \mathfrak{a}\operatorname{div}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}\operatorname{div}\mathfrak{a} \\ &- [\mathfrak{a}\operatorname{rot}\mathfrak{b}] - [\mathfrak{b}\operatorname{rot}\mathfrak{a}]). \end{aligned} \right.$$

Dieser Vektor $(\mathfrak{b}\operatorname{grad})\mathfrak{a}$ [1]) gibt den Zuwachs an, den der Vektor $\mathfrak{a}$ erfährt, wenn man in einem Feld um die durch $\mathfrak{b}$ angezeigte Strecke fortschreitet. Hieraus folgt

$$(8)\qquad \operatorname{rot}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = (\mathfrak{b}\operatorname{grad})\mathfrak{a} - (\mathfrak{a}\operatorname{grad})\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\operatorname{div}\mathfrak{b} - \mathfrak{b}\operatorname{div}\mathfrak{a}$$

$$(9)\qquad \operatorname{grad}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}\operatorname{grad})\mathfrak{b} + (\mathfrak{b}\operatorname{grad})\mathfrak{a} + [\mathfrak{a}\operatorname{rot}\mathfrak{b}] + [\mathfrak{b}\operatorname{rot}\mathfrak{a}].$$

5. Bemerkung zu den Symbolen.

Die Bezeichnungen in der Vektoranalysis stehen nicht fest. Man findet z. B. auch folgende Symbole:

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} & \text{für} & (\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \\ \mathfrak{a}\times\mathfrak{b} & „ & [\mathfrak{a}\mathfrak{b}] \\ \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c} & „ & (\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}]) \\ \nabla\varphi & „ & \operatorname{grad}\varphi \\ \nabla\mathfrak{a} & „ & \operatorname{div}\mathfrak{a} \\ [\nabla\mathfrak{a}] & „ & \operatorname{rot}\mathfrak{a} = \operatorname{curl}\mathfrak{a} \\ \nabla^2\varphi & „ & \Delta\varphi \\ (\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{b} & „ & (\mathfrak{a}\operatorname{grad})\mathfrak{b}. \end{array}$$

Außerdem wird (z. B. bei *Runge*, Vektoranalysis) der Begriff der Plangröße $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ gebraucht, d. h. einer Größe, welche die Fläche des Parallelogramms über $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bedeutet. Der Vektor $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$ bzw. $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ heißt die „Ergänzung“ zu dieser Plangröße $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, geschrieben $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b} = |\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und umgekert $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = |(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})$. Ferner

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} &= \mathfrak{a}|\mathfrak{b} \\ \operatorname{div}\mathfrak{a} &= \mathfrak{a}|\nabla \\ \operatorname{rot}\mathfrak{a} &= \nabla\times\mathfrak{a} \\ \Delta\varphi &= (\nabla|\nabla)\varphi. \end{aligned}$$

Der Operator ∇ (Nabla) kann hierbei formal wie ein Vektor behandelt werden. Der Vorteil dieser Modifikationen liegt unter anderem in der größeren Symmetrie der mit ihrer Benutzung geschriebenen Formeln.

[1]) Für $(\mathfrak{b}\operatorname{grad})\mathfrak{a}$ wird auch $(\mathfrak{b}\nabla)\mathfrak{a}$ geschrieben. Das Symbol ∇ wird „Nabla“ gelesen.

6. Spezielle Vektorfelder.

1. Ein Vektorfeld $\mathfrak{a}$, in dem $\operatorname{rot}\mathfrak{a}$ überall verschwindet, heißt ein „wirbelfreies Feld".

Ein wirbelfreier Vektor $\mathfrak{a}$ ist darstellbar als negativer Gradient eines Skalars φ,

$$\mathfrak{a} = -\operatorname{grad}\varphi,$$

welcher „*Potential*" oder auch „*skalares Potential*" genannt wird. Es gilt dann

$$\int_1^2 a_s\, ds = \varphi_1 - \varphi_2. \tag{1}$$

Der Wert des Integrals ist nur abhängig von den Grenzen, unabhängig vom Integrationsweg und verschwindet für einen geschlossenen Integrationsweg. Umgekehrt kann man auch sagen: Das Feld des Gradienten eines Skalars ist stets ein wirbelfreies.

Setzt man

$$\operatorname{div}\mathfrak{a} = -\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = -\Delta\varphi = 4\pi\varrho, \tag{2}$$

so wird $\varphi = \int \frac{dv\,\varrho}{r}$, wo r die Entfernung des Volumendifferentials vom Aufpunkt, in dem φ berechnet werden soll, angibt. Ist also $\operatorname{div}\mathfrak{a}$ überall gegeben und $\operatorname{rot}\mathfrak{a} = 0$, so gestattet diese Formel die Berechnung von φ, also auch die von $\mathfrak{a}$ selbst.

2. Ein Vektorfeld $\mathfrak{a}$, in dem $\operatorname{div}\mathfrak{a}$ überall verschwindet, heißt ein „quellenfreies Feld". Ein quellenfreier Vektor $\mathfrak{a}$ ist darstellbar als rot eines quellenfreien Vektors $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{a} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}, \quad \operatorname{div}\mathfrak{A} = 0, \tag{3}$$

welcher „*Vektorpotential*" genannt wird.

Setzt man

$$\operatorname{rot}\mathfrak{a} = \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathfrak{A}) = -\Delta\mathfrak{A} = 4\pi\mathfrak{c}, \tag{4}$$

so wird

$$\mathfrak{A} = \int \frac{dv\,\mathfrak{c}}{r}. \tag{5}$$

Ist also $\operatorname{rot}\mathfrak{a}$ überall gegeben und $\operatorname{div}\mathfrak{a} = 0$, so gestattet diese Formel die Berechnung von $\mathfrak{A}$, also auch die von $\mathfrak{a}$ selbst.

Jedes Vektorfeld läßt sich eindeutig als Summe (Superposition) eines wirbelfreien und eines quellenfreien Feldes darstellen.

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' + \mathfrak{a}'', \tag{6}$$

wo $\operatorname{rot}\mathfrak{a}' = 0$; $\operatorname{div}\mathfrak{a}'' = 0$.

$$\mathfrak{a}' = -\operatorname{grad}\int \frac{dv\operatorname{div}\mathfrak{a}}{4\pi r}; \qquad \mathfrak{a}'' = \operatorname{rot}\int \frac{dv\operatorname{rot}\mathfrak{a}}{4\pi r}, \tag{7}$$

wobei die durch die Symbole vorgeschriebenen Operationen *unter* dem Integral an der Stelle des Volumendifferentials dv, die Operationen *vor* dem Integral an der Stelle des zu bestimmenden Vektors $\mathfrak{a}'$ bzw. $\mathfrak{a}''$ vorzunehmen sind.

7. Der Vektor $\mathfrak{r}$.

Ein wichtiger Vektor ist der Ortsvektor $\mathfrak{r}$, welcher die Lage eines Punktes in bezug auf einen festen Punkt $\mathfrak{r} = 0$ darstellt. Er bildet ein Vektorfeld, indem jedem Punkte des Raumes ein Vektor $\mathfrak{r}$ zugeordnet werden kann, dessen Richtung vom Nullpunkt zu dem Aufpunkt zeigt und dessen Betrag die Entfernung vom Nullpunkt ist.

Für den Ortsvektor $\mathfrak{r}$ gelten eine Reihe von besonderen Relationen. Es ist (wo $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ freie Vektoren seien):

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathfrak{r} &= 0\\ \operatorname{div}\mathfrak{r} &= 3\\ \operatorname{grad}(\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}) &= \mathfrak{a}\\ \operatorname{rot}[\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}] &= -2\mathfrak{a}\\ \operatorname{div}[\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}] &= 0\\ \operatorname{rot}(\mathfrak{b}\,(\mathfrak{r}\,\mathfrak{a})) &= [\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\\ \operatorname{div}(\mathfrak{b}\,(\mathfrak{r}\,\mathfrak{a})) &= (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) \end{aligned}\right.$$

$$\operatorname{grad} r = \frac{\mathfrak{r}}{r},\quad \text{wo } r = |\mathfrak{r}| \qquad \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathfrak{r}}{r^3}$$

$$\operatorname{div}(r\,\mathfrak{a}) = \frac{(\mathfrak{r}\,\mathfrak{a})}{r} \qquad (\mathfrak{a}\operatorname{grad} r) = \frac{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{r})}{r}$$

$$(\mathfrak{a}\operatorname{grad})\,\mathfrak{r} = \mathfrak{a}$$

$$\operatorname{rot}(r\,\mathfrak{a}) = \frac{[\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}]}{r} \qquad \operatorname{grad}\frac{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{r})}{r^n} = \frac{\mathfrak{a}}{r^n} - \frac{n\,\mathfrak{r}\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{r})}{r^{n+2}}$$

$$\operatorname{rot}\frac{[\mathfrak{a}\,\mathfrak{r}]}{r^n} = \frac{(2-n)\,\mathfrak{a}}{r^n} + \frac{n\,\mathfrak{r}\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{r})}{r^{n+2}}$$

Ist eine Kurve gegeben und ist $\mathfrak{r}$ der Ortsvektor ihrer Punkte, so ist

$$(2)\qquad \frac{d\mathfrak{r}}{ds} = \mathfrak{t}_1$$

ein Einheitsvektor parallel zur Tangente im Punkte $\mathfrak{r}$.

Ferner ist

$$(3)\qquad \frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2} = \frac{\mathfrak{R}}{R^2}.$$

Hierin ist $\mathfrak{R}$ ein Vektor, welcher Richtung und Länge des Krümmungsradius der Kurve im Punkte $\mathfrak{r}$ angibt.

$\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{t}_1$ bestimmen also die Schmiegungsebene der Kurve im Punkte $\mathfrak{r}$.

8. Unstetige Vektorfelder.

1. Es sei $\operatorname{rot} \mathfrak{a} = 0$

und $\operatorname{div} \mathfrak{a} = 0$, außer für $\mathfrak{r} = 0$.

Dann ist

(1) $$\int a_n \, df = \text{const} = 4\pi e$$

für jede die Stelle $\mathfrak{r} = 0$ umschließende Fläche,

(2) $$\int a_n \, df = 0$$

für jede die Stelle $\mathfrak{r} = 0$ nicht umschließende Fläche (vgl. S. 155).

e heißt die „*Ergiebigkeit*" der „*Quelle*" in $\mathfrak{r} = 0$.

Es wird

(3) $$\mathfrak{a} = -\operatorname{grad} \varphi; \quad \varphi = \frac{e}{r}.$$

1a. Es sei $\operatorname{div} \mathfrak{a} = 0$ außer in $\mathfrak{r} = 0$ und in $\mathfrak{r} = \mathfrak{l}$, und zwar sei die Ergiebigkeit der beiden Quellen $= -e$ bzw. $+e$. Läßt man dann $\mathfrak{l}$ zur Grenze 0 übergehen, wobei $\mathfrak{l}e = \mathfrak{m}$ endlich bleibe, so spricht man von einer „*Doppelquelle*" vom „*Moment*" $\mathfrak{m}$.

Es wird

(4) $$\mathfrak{a} = -\operatorname{grad} \varphi; \quad \varphi = \left(\mathfrak{m} \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) = -\frac{(\mathfrak{m}\mathfrak{r})}{r^3}.$$

2. Es sei $\operatorname{rot} \mathfrak{a} = 0$

und $\operatorname{div} \mathfrak{a} = 0$.

$\mathfrak{a}$ ändere sich unstetig an einer Fläche, so daß a_n beim Übergang von einer Seite der Fläche zur anderen von a_{n1} auf $-a_{n2}$ springt.

Wir definieren die Größe

(5) $$\omega = -\frac{1}{4\pi}(a_{n1} + a_{n2}),$$

wo $\mathfrak{n}$ der nach der Fläche hin gerichtete Normalvektor ist.

$4\pi\omega$ heißt „Flächendivergenz".

ω ist die auf die Flächeneinheit bezogene Ergiebigkeit der über die Fläche verteilt gedachten Quellen.

Springt auch φ an der Fläche, so definieren wir die Größe

(6) $$\tau = \frac{1}{4\pi}(\varphi_1 - \varphi_2).$$

In diesem Falle spricht man von einer „Doppelfläche" oder „Doppelschicht" mit dem „Moment" $4\pi\tau$.

Dann ist $\mathfrak{a} = -\operatorname{grad} \varphi$

(7) $$\varphi = \int df \left(\frac{\omega}{r} - \tau \left(\mathfrak{n}_1 \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right)\right),$$

erstreckt über die Fläche.

Ist τ eine Konstante längs der Fläche und $\omega = 0$, so wird

(8) $$\varphi = \tau\,\Omega\,,$$

wo Ω der räumliche Winkel ist, unter dem die Berandung der Fläche vom Aufpunkt aus erscheint.

3. Es sei $$\operatorname{div}\mathfrak{a} = 0$$
und $$\operatorname{rot}\mathfrak{a} = 0,$$
außer auf einer Linie L („Wirbellinie").

Dann ist für jede die Linie umfassende Kurve

(9) $$\int ds\, a_s = \int df \operatorname{rot}_n \mathfrak{a} = \text{const} = 4\pi\tau \quad (\text{vgl. S. } 155),$$

wobei die Fläche $\int df$ beliebig verzerrt werden kann. Daraus folgt, daß τ längs L konstant und daß die Wirbellinie L geschlossen sein oder im Unendlichen endigen muß.

τ heißt das *Moment der Wirbellinie.*

Wegen $dv = ds\, df$ ist dann das Vektorpotential der Wirbellinie gegeben durch

(10) $$\mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi}\int\!\!\int \frac{ds\, df \operatorname{rot}\mathfrak{a}}{r} = \tau \int\limits_L \frac{d\mathfrak{s}}{r},$$

daraus folgt

(11) $$\mathfrak{a} = \operatorname{rot}\mathfrak{A} = \tau \int\limits_L \frac{1}{r^3}\,[d\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}].$$

Da $\mathfrak{a}$ außer auf L *wirbelfrei* ist, läßt sich $\mathfrak{a}$ auch aus einem skalaren Potential φ ableiten $\mathfrak{a} = -\operatorname{grad}\varphi$, wobei jedoch für jede den geschlossenen Wirbelfaden umfassende Kurve nach (9)

$$\int\limits_2^1 ds\, a_s = \varphi_1 - \varphi_2 = 4\pi\tau$$

ist, falls 1 und 2 zwei zusammengehörige Vorder- und Rückseitenpunkte auf einer über L ausgespannten Fläche F sind. Die Wirbellinie L vom Moment $4\pi\tau$ ist also äquivalent einer Doppelfläche F vom Moment $4\pi\tau$, welche über L beliebig ausgespannt ist. Das skalare Potential ist also $\varphi = \tau\,\Omega$ und $\mathfrak{a} = -\operatorname{grad}\varphi$.

4. Es sei $\operatorname{rot}\mathfrak{a} = 0$ *außer auf einer Fläche* und $\operatorname{div}\mathfrak{a} = 0$, d. h. $\mathfrak{a}$ ändere sich unstetig an einer Fläche, so daß $[\mathfrak{n}\,\mathfrak{a}]$ (eine Parallelkomponente zur Fläche) beim Übergang von einer Seite der Fläche zur anderen von $[\mathfrak{n}\,\mathfrak{a}_1]$ zu $[\mathfrak{n}\,\mathfrak{a}_2]$ springt.

Wir definieren den Vektor

(12) $$\mathfrak{g} = \frac{1}{4\pi}\,[\mathfrak{n}\,(\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2)].$$

$4\pi\mathfrak{g}$ heißt *„Flächenwirbel"*.

Es ist dann

(13) $$\mathfrak{A} = \int df\,\frac{\mathfrak{g}}{r}; \quad \mathfrak{a} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}.$$

9. Vektorgleichungen.

$\mathfrak{x}$ sei ein unbekannter Vektor, der zu ermitteln ist.

1. $\mathfrak{x}+\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$. Lösung: $\mathfrak{x}=\mathfrak{b}-\mathfrak{a}$.

2. $$\begin{cases}(\mathfrak{x}\,\mathfrak{a})=p\\ [\mathfrak{x}\,\mathfrak{a}]=\mathfrak{b}\end{cases}\qquad \text{Lösung: } \mathfrak{x}=\frac{\mathfrak{a}\,p}{a^2}+\frac{[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]}{a^2}.$$

Ist nur eine der Gleichungen gegeben, so bleibt $\mathfrak{b}$ bzw. p unbestimmt.

3. $$\begin{cases}(\mathfrak{x}\,\mathfrak{a})=p\\ (\mathfrak{x}\,\mathfrak{b})=q\\ (\mathfrak{x}\,\mathfrak{c})=r\end{cases}\qquad \text{Lösung: } \mathfrak{x}=\frac{p\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]+q\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}]+r\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]}{(\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}])}.$$

4. $$\mathfrak{p}=x\,\mathfrak{a}+y\,\mathfrak{b}+z\,\mathfrak{c}.$$

$$\text{Lösung: } x=\frac{(\mathfrak{p}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}])}{(\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}])},\quad y=\frac{(\mathfrak{p}\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}])}{(\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}])},\quad z=\frac{(\mathfrak{p}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}])}{(\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}])}.$$

5. $$\mathfrak{p}=x\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]+y\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}]+z\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}].$$

$$\text{Lösung: } x=\frac{(\mathfrak{p}\,\mathfrak{a})}{(\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}])},\quad y=\frac{(\mathfrak{p}\,\mathfrak{b})}{(\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}])},\quad z=\frac{(\mathfrak{p}\,\mathfrak{c})}{(\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}])}.$$

Es ist zu beachten, daß eine Gleichung, die zwei Vektoren gleichsetzt, drei algebraischen Gleichungen äquivalent ist. Andererseits ist ein unbekannter Vektor äquivalent drei algebraischen Unbekannten.

10. Lineare Vektorfeldfunktion.

Schreitet man in einem Vektorfelde $\mathfrak{a}$ längs einer beliebigen Geraden fort und ist hierbei der Vektor $\mathfrak{a}$ eine lineare Funktion der auf der Geraden gemessenen Länge, also darstellbar in der Form $\mathfrak{a}_1-\mathfrak{a}_2=\mathfrak{b}\,d$, wo $\mathfrak{b}$ einen konstanten nur durch die Richtung der Geraden bestimmten Vektor bedeutet und d den Abstand zwischen den Punkten der Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$, so heißt das Vektorfeld $\mathfrak{a}$ eine lineare Vektorfunktion des Orts.

Eine solche Funktion läßt sich z. B. aufbauen aus einer Anzahl von Größen der Form:

$$(1)\qquad \mathfrak{a}=\mathfrak{a}_0+k\,\mathfrak{r}+\sum_n\left([\mathfrak{u}_n\,\mathfrak{r}]+\mathfrak{p}_n\,(\mathfrak{q}_n\,\mathfrak{r})+[\mathfrak{b}_n\,[\mathfrak{a}_n\,\mathfrak{r}]]+\cdots\right),$$

d. h. aus einer Summe von *Vektoren*, die von $\mathfrak{r}$ linear abhängen. Die Größen $\mathfrak{a}_0\,k\,\mathfrak{u}_n\,\mathfrak{p}_n\,\mathfrak{q}_n\,\mathfrak{b}_n\,\mathfrak{e}_n$ seien hierbei Konstanten bzw. freie Vektoren.

Der Ausdruck läßt sich aber, ohne seine Allgemeinheit zu beschränken, auch in der einfacheren Form schreiben:

$$(2)\qquad \mathfrak{a}=\mathfrak{a}_0+\sum_n\left(\mathfrak{p}_n\,(\mathfrak{q}_n\,\mathfrak{r})\right)\qquad (n=1,2,3),$$

wo die $\mathfrak{p}_n$ und $\mathfrak{q}_n$ freie Vektoren seien.

Es ist dann

(3) $$\operatorname{div} \mathfrak{a} = \sum_n (\mathfrak{p}_n \mathfrak{q}_n).$$

(4) $$\operatorname{rot} \mathfrak{a} = \sum_n [\mathfrak{p}_n \mathfrak{q}_n].$$

Zerlegt man $\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_0$ in 2 Felder $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{a}''$, so daß $\operatorname{div} \mathfrak{a}' = 0$ und $\operatorname{rot} \mathfrak{a}'' = 0$ wird (vgl. S. 158), d. h. in einen quellenfreien und einen wirbelfreien Teil, so ist

(5) $$\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}' + \mathfrak{a}''$$

(6) $$\mathfrak{a}' = [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]; \quad \operatorname{rot} \mathfrak{a}' = 2\mathfrak{u}; \quad \mathfrak{u} = \tfrac{1}{2}\sum [\mathfrak{p}_n \mathfrak{q}_n].$$

(7) $$\mathfrak{a}'' = \tfrac{1}{2}\sum (\mathfrak{p}_n (\mathfrak{q}_n \mathfrak{r}) + \mathfrak{q}_n (\mathfrak{p}_n \mathfrak{r})); \quad \operatorname{div} \mathfrak{a}'' = \sum (\mathfrak{p}_n \mathfrak{q}_n).$$

11. Tensoren (zweiten Grades).

a) Der Tensorbegriff.

Die lineare Abhängigkeit des letzten Paragraphen, die jedem $\mathfrak{r}$ ein $\mathfrak{a}$ zuordnet, schreiben wir symbolisch:

$$\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{T}\,\mathfrak{r}$$

oder allgemein die lineare Abhängigkeit zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$:

(1) $$\mathfrak{a} = \mathfrak{T}\,\mathfrak{b} = \sum_{n=1}^{3} \mathfrak{p}_n (\mathfrak{q}_n \mathfrak{b}).$$

Den Operator $\mathfrak{T}$ bezeichnet man als einen *Tensor*[1]).

Die Linearität fordert, daß:

(2) $$k\,\mathfrak{a} = k\,\mathfrak{T}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{T}\,k\,\mathfrak{b}$$

ferner, wenn $\mathfrak{a}' = \mathfrak{T}\mathfrak{b}'$:

(3) $$\mathfrak{a} + \mathfrak{a}' = \mathfrak{T}\mathfrak{b} + \mathfrak{T}\mathfrak{b}' = \mathfrak{T}(\mathfrak{b} + \mathfrak{b}').$$

Definieren ferner die Summe zweier Tensoren $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ aus:

(4) $$(\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2)\,\mathfrak{b} = \mathfrak{T}_1\,\mathfrak{b} + \mathfrak{T}_2\,\mathfrak{b},$$

so sieht man, daß der Operator $\mathfrak{T}$ wie eine algebraische Größe im Sinne der obigen Formeln behandelt werden darf.

Ein Tensor heißt *symmetrisch*, wenn für *beliebige* Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$:

(5) $$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{T}\,\mathfrak{b}) = (\mathfrak{b}\,\mathfrak{T}\,\mathfrak{a})$$

ist, *antisymmetrisch* (oder *schiefsymmetrisch*), wenn:

(5') $$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{T}\,\mathfrak{b}) = -(\mathfrak{b}\,\mathfrak{T}\,\mathfrak{a})$$

ist. Jeder Tensor $\mathfrak{T}$ kann eindeutig in die Summe von einen sym-

[1]) Speziell als Tensor 2. Grades. Ein Skalar kann aus später ersichtlichen Gründen (vgl. S. 173) als ein Tensor 0. Grades, ein Vektor als ein solcher 1. Grades bezeichnet werden.

metrischen und einem antisymmetrischen Teil: $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ zerlegt werden:

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2.$$

Der Tensor: $\tilde{\mathfrak{T}} = \mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_2$ heißt der zu $\mathfrak{T}$ *konjugierte* oder *transponierte* Tensor. Ein symmetrischer Tensor ist also zu sich selbst konjugiert. Es gilt ganz allgemein: $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{T}\,\mathfrak{b}) = (\mathfrak{b}\,\tilde{\mathfrak{T}}\,\mathfrak{a})$.

Die Zerlegung des Vektors $\mathfrak{a} = \mathfrak{T}\mathfrak{r}$ (§ 10, S. 163) in einen wirbelfreien und quellenfreien Teil: $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$ entspricht dieser Zerlegung von $\mathfrak{T}$, d. h.

(6) $$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{T}_1 \mathfrak{r}$$

(6') $$\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{T}_2 \mathfrak{r}.$$

Infolge der linearen Beziehung zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ kann im allgemeinen auch $\mathfrak{b}$ durch einen neuen Tensor aus $\mathfrak{a}$ abgeleitet werden. Er wird als der zu $\mathfrak{T}$ *reziproke* Tensor: $\mathfrak{T}^{-1}$ bezeichnet:

(7) $$\mathfrak{b} = \mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{a}.$$

Haben wir außer der Abhängigkeit:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{T}\mathfrak{b}$$

die zweite:

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{S}\mathfrak{c}$$

also:

(8) $$\mathfrak{a} = \mathfrak{T}\mathfrak{S}\mathfrak{c}$$

so vermittelt auch diese Formel eine lineare Abhängigkeit zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$, d. h., $\mathfrak{T}\mathfrak{S}$ repräsentiert einen neuen Tensor, der als das *tensorielle Produkt* von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{S}$ bezeichnet wird. Im allgemeinen ist:

$$\mathfrak{T}\mathfrak{S} \neq \mathfrak{S}\mathfrak{T}.$$

Das tensorielle Produkt eines Tensors mit sich selbst: $\mathfrak{T}\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^2$ heißt *iterierter* Tensor. Diese Produktbildung kann beliebig oft wiederholt werden:

(9) $$\mathfrak{T}\mathfrak{T}\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^3, \ldots$$

b) Spezielle Tensoren.

Als *Einheitstensor* $\mathfrak{E}$ bezeichnen wir einen Tensor, der jeden beliebigen Vektor $\mathfrak{a}$ in sich selber überführt:

(10) $$\mathfrak{E}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}.$$

Für jeden beliebigen Tensor ist: $\mathfrak{T}\mathfrak{T}^{-1} = \mathfrak{E} = \mathfrak{E}^{-1} = \tilde{\mathfrak{E}}$.

Als *orthogonalen* Tensor $\mathfrak{D}$ bezeichnen wir einen Tensor, für den

(11) $$\tilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}^{-1}$$

ist. Daraus folgt für beliebige Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$:

(12) $$(\mathfrak{D}\mathfrak{a}\,\mathfrak{D}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}).$$

Die durch einen solchen Tensor festgelegte Zuordnung kann für ein beliebiges System von Vektoren durch eine vom Tensor allein bedingte bloße Drehung beschrieben werden, d. h. es bleibt der Betrag aller Vektoren erhalten: $(\mathfrak{D}\,\mathfrak{a})^2 = (\mathfrak{a})^2$, wie auch die Winkel zwischen ihnen.

c) Abgeleitete Skalare.

Bildet man den Ausdruck:

(13) $$\frac{(\mathfrak{T}\,\mathfrak{a}\,[\mathfrak{T}\,\mathfrak{b}\;\mathfrak{T}\,\mathfrak{c}])}{(\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}])} = |T|,$$

so erkennt man leicht, daß für irgend 3 nichtkonplanare Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ dieser Ausdruck von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ unabhängig ist. Er ist also ein von $\mathfrak{T}$ allein abhängiger Skalar. Man bezeichnet ihn als die *Determinante* des Tensors (vgl. S. 174).

Bildet man die Determinante für den Tensor:

$$\mathfrak{T} + \lambda\,\mathfrak{E}$$

und entwickelt ihn nach den Potenzen von λ, so erhält man einen Ausdruck der Form:

(14) $$\lambda^3 + \lambda^2\, T_{(1)} + \lambda\, T_{(2)} + |T|.$$

Die hier auftretenden Größen $T_{(1)}$ und $T_{(2)}$ sind zwei weitere Skalare, die aus dem Tensor $\mathfrak{T}$ abzuleiten sind. Wir schreiben im weiteren statt $T_{(1)}$: $|\mathfrak{T}|$, und bezeichnen diese Größe als *Spur* des Tensors. Es ist ferner:

(15) $$T_{(2)} = |T|\,|\mathfrak{T}^{-1}|.$$

Als *skalares Produkt* von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{S}$ bezeichnet man die Spur des tensoriellen Produktes $\mathfrak{T}\,\tilde{\mathfrak{S}}$:

(16) $$(\mathfrak{T}\,\mathfrak{S}) = |\mathfrak{T}\,\tilde{\mathfrak{S}}|.$$

Es gilt:

(17) $$(\mathfrak{T}\,\mathfrak{S}) = (\mathfrak{S}\,\mathfrak{T}).$$

Das so gebildete Produkt eines Tensors mit sich selbst ergibt einen neuen Skalar, den man als *Quadrat* des Tensors bezeichnen kann.

Für antisymmetrische Tensoren ist die Spur immer $= 0$, die Determinante verschwindet dann gleichfalls[1]).

Für den Einheitstensor gilt:

$$|E| = 1, \quad |\mathfrak{E}| = 3, \quad (\mathfrak{E}\,\mathfrak{E}) = 3.$$

Für den orthogonalen Tensor gilt:

$$|O| = 1 \qquad (\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}) = 3$$

und:

$$|\mathfrak{D}| = 1 + 2\cos\delta,$$

wenn δ den Winkel der Drehung bezeichnet (vgl. S. 84).

---

[1]) Entwickelt man eine Vektoranalysis in Räumen beliebiger Mannigfaltigkeit, so verschwindet die Determinante nur bei *ungeradzahliger* Mannigfaltigkeit.

d) Das Tensorellipsoid.

Definiert man eine Fläche durch die Gleichung:

$$(18)\qquad (\mathfrak{r}\,\mathfrak{T}\,\mathfrak{r}) = 1\,,$$

so stellt diese ein *Ellipsoid* dar: das *Tensorellipsoid*. Dieses gestattet eine geometrische Darstellung des *symmetrischen* Teils eines Tensors. Die Hauptachsen dieses Ellipsoids werden zugleich als *Hauptachsen des Tensors* bezeichnet.

Den antisymmetrischen Teil eines Tensors: $\mathfrak{T}_2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{T} - \tilde{\mathfrak{T}})$ kann man gleichfalls geometrisch, und zwar durch einen Vektor $\mathfrak{u}$ darstellen. Dieser wird festgelegt durch die Gleichungen:

$$(19)\qquad \mathfrak{u} = \frac{[\mathfrak{a}\,\mathfrak{T}_2\,\mathfrak{a}]}{a^2}\,.$$

Man überzeugt sich leicht, daß dieser Vektor $\mathfrak{u}$ von der Wahl von $\mathfrak{a}$ unabhängig ist. Daraus folgt weiter:

$$(20)\qquad \mathfrak{T}_2\,\mathfrak{a} = [\mathfrak{u}\,\mathfrak{a}]\,.$$

e) Zusammenhang zwischen iterierten Tensoren.

Zwischen 4 durch Iteration nacheinander gewonnenen Tensoren: $\mathfrak{T}^n$, $\mathfrak{T}^{n+1}$, $\mathfrak{T}^{n+2}$, $\mathfrak{T}^{n+3}$ besteht folgende identische Relation:

$$(21)\qquad \mathfrak{T}^{n+3} - |\mathfrak{T}|\,\mathfrak{T}^{n+2} + |\mathfrak{T}^{-1}|\,|T|\,\mathfrak{T}^{n+1} - |T|\,\mathfrak{T}^{n} = 0\ ^{1)}.$$

Diese Relation kann bei der Lösung von Tensorgleichungen benutzt werden. Ist z. B. gegeben die Gleichung:

$$\mathfrak{T}\,\mathfrak{a} - C\,\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\,,$$

dann ist:

$$\mathfrak{T}^2\,\mathfrak{a} - C\,\mathfrak{T}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{T}\,\mathfrak{b}\,,$$
$$\mathfrak{T}^3\,\mathfrak{a} - C\,\mathfrak{T}^2\,\mathfrak{a} = \mathfrak{T}^2\,\mathfrak{b}\,.$$

Eliminiert aus diesen drei Gleichungen unter Benutzung obiger Identität $\mathfrak{T}\,\mathfrak{a}$, $\mathfrak{T}^2\,\mathfrak{a}$, $\mathfrak{T}^3\,\mathfrak{a}$, so bleibt $\mathfrak{a}$ als Funktion von

$$C,\ |\mathfrak{T}|,\ |\mathfrak{T}^{-1}|,\ |T|,\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{T}\,\mathfrak{b},\ \mathfrak{T}^2\,\mathfrak{b}\,.$$

f) Ortsabhängige Tensoren.

Ist der Tensor als eine Funktion des Ortes gegeben, so spricht man von einem *Tensorfeld*. Aus einem solchen können wir einen *Vektor* ableiten, der aus der Ortsabhängigkeit des Tensors entspringt:

$$(22)\qquad \operatorname{div}\mathfrak{T} = \lim_{V=0}\frac{1}{V}\int d\,f\,(\mathfrak{T}\,\mathfrak{n})$$

$\mathfrak{n}$ bedeutet, wie früher, die Normale der das Volumen V umschließenden Oberfläche.

---

[1] In Mannigfaltigkeiten von der Ordnung m besteht eine analoge Beziehung zwischen $m+1$ solcher Tensoren.

Dem *Gaußschen* Satz entspricht die Gleichung:

(23) $$\int df\,(\mathfrak{T}\,\mathfrak{n}) = \int dv\,\operatorname{div}\mathfrak{T}.$$

Ferner gilt:

(24) $$\operatorname{div}(\varphi\,\mathfrak{T}) = \varphi\,\operatorname{div}\mathfrak{T} + \mathfrak{T}\,\operatorname{grad}\varphi$$

speziell für den Einheitstensor:

(24′) $$\operatorname{div}(\varphi\,\mathfrak{E}) = \operatorname{grad}\varphi.$$

Die Anwendung des *Gaußschen* Satzes auf den Vektor $\mathfrak{T}\,\mathfrak{a}$ ergibt:

(25) $$\int dv\,\operatorname{div}\mathfrak{T}\,\mathfrak{a} = \int df\,(\mathfrak{n}\,\mathfrak{T}\,\mathfrak{a}) = \int df\,(\mathfrak{a}\,\tilde{\mathfrak{T}}\,\mathfrak{n}).$$

g) Differentiation nach einem Parameter (t).

(26) $$\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{T}\,\mathfrak{a}) = \mathfrak{T}\,\frac{\partial\,\mathfrak{a}}{\partial t} + \mathfrak{T}'\,\mathfrak{a}, \quad \text{wo} \quad \mathfrak{T}' = \frac{\partial\,\mathfrak{T}}{\partial t}.$$

Für den orthogonalen Tensor $\mathfrak{D}$ ergibt sich, wenn wir unter t die Zeit verstehen:

(27) $$\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{D}\,\mathfrak{a}) = \mathfrak{D}\,\frac{\partial\,\mathfrak{a}}{\partial t} + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{a}],$$

wo $\mathfrak{u}$ der Vektor der Drehgeschwindigkeit ist, d. h. ein Vektor, dessen Richtung in die Drehachse fällt und dessen Betrag gleich der Drehgeschwindigkeit ist. Durch Verwendung eines von der Zeit abhängigen orthogonalen Tensors ist es daher möglich, ein beliebig bewegtes starres System auf Ruhe zu transformieren (vgl. S. 168).

12. Der Gradiententensor.

Analog, wie der Vektor grad φ die Ortsabhängigkeit des Skalars φ charakterisiert, können wir einen Tensor bilden, der die Ortsabhängigkeit eines Vektors darstellt.

Es entspricht der Gleichung:

$$d\varphi = (\operatorname{grad}\varphi\; d\mathfrak{s})$$

die analoge:

(1) $$d\,\mathfrak{a} = \mathfrak{A}\,d\mathfrak{s}.$$

Diesen Tensor $\mathfrak{A}$ nennen wir den „*Gradienten*" von $\mathfrak{a}$ [1]).

Es ist:

(2) $$|\mathfrak{A}| = \operatorname{div}\mathfrak{a}$$

(3) $$\operatorname{div}\mathfrak{A} = \Delta\,\mathfrak{a}$$

(4) $$(\mathfrak{b}\,\operatorname{grad})\,\mathfrak{a} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{b}.$$

Wir können den Tensor $\mathfrak{A}$ in seinen symmetrischen und antisymme-

[1]) Bei *Gans* mit „def $\mathfrak{a}$" bezeichnet; es liegt gar kein Grund vor, diesen Tensor nicht mit „grad $\mathfrak{a}$" zu bezeichnen.

trischen Teil $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ zerlegen. Den symmetrischen Teil $\mathfrak{A}_1$ zerlegen wir weiter in:

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{E}\,\frac{|\mathfrak{A}|}{3} + \mathfrak{A}_1' . \tag{5}$$

Es ist dann:

$$|\mathfrak{A}_1'| = 0 \tag{5a}$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} = \Delta\,\mathfrak{a} = \tfrac{1}{3}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{a} + \operatorname{div}\mathfrak{A}_1' + \operatorname{div}\mathfrak{A}_2 \tag{5b}$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{A}_1' = \tfrac{1}{2}\left(\Delta\,\mathfrak{a} + \tfrac{1}{3}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{a}\right) \tag{5c}$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{A}_2 = \tfrac{1}{2}\operatorname{rot}\ \operatorname{rot}\mathfrak{a} . \tag{5d}$$

Wir bemerken ferner noch folgende Formel:

$$\operatorname{div}\mathfrak{T}\,\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}\operatorname{div}\mathfrak{T}) + (\mathfrak{T}\,\mathfrak{A}) . \tag{6}$$

13. Tensoren höheren Grades.

Ein Vektor $\mathfrak{a}$ kann auch durch lineare Abhängigkeit von *zwei* andern $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ gegeben sein:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{T}(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = \sum \mathfrak{p}_n (\mathfrak{q}_n \mathfrak{b})(\mathfrak{r}_n \mathfrak{c}) .$$

$\mathfrak{T}$ heißt dann Tensor 3. Grades. Analog bildet man Tensoren höheren Grades.

14. Transformation von Vektoren auf bewegtes Bezugssystem.

In einem Vektorfeld $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\mathfrak{r}, t)$ d. h. einem solchen, das außer vom Ort $\mathfrak{r}$ auch von der Zeit t abhängt, wird, wenn man es in einem mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ *gradlinig* starr fortschreitendes Bezugssystem $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} - \mathfrak{v}t$ darstellt,

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{r}, t) = \mathfrak{a}'(\mathfrak{r}', t)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{a}'}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\operatorname{grad})\,\mathfrak{a}$$

analog für einen Skalar $\varphi(\mathfrak{r}, t) = \varphi'(\mathfrak{r}', t)$

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\mathfrak{v}\operatorname{grad}\varphi) .$$

$\frac{\partial \mathfrak{a}'}{\partial t}$ bedeutet also die zeitliche Änderung von $\mathfrak{a}$ für konstantes $\mathfrak{r}'$, d. h. in einem festen Punkt des bewegten Systems.

In einem mit $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]$ fortschreitendem und *rotierendem* Bezugssystem $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} - \mathfrak{v}_0 t - [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]\,t$ wird

$$\frac{\partial \mathfrak{a}'}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\operatorname{grad})\,\mathfrak{a} + [\mathfrak{a}\,\mathfrak{u}] = \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t} + \operatorname{rot}[\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}] + \mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{a}$$

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\mathfrak{v}\operatorname{grad}\varphi) .$$

Für ein Linienintegral $\int_1^2 (\mathfrak{a}\, d\mathfrak{s})$, das längs einer sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegenden Kurve gebildet ist, gilt

$$\frac{d}{dt}\int_1^2 (\mathfrak{a}\, d\mathfrak{s}) = \int_1^2 d\mathfrak{s}\left(\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t} + \operatorname{grad}(\mathfrak{v}\,\mathfrak{a}) - [\mathfrak{v} \operatorname{rot} \mathfrak{a}]\right)$$

und für ein Oberflächenintegral $\int d f\, \mathfrak{a}_n$

$$\frac{d}{dt}\int d f\, \mathfrak{a}_n = \int d f\left(\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t} + \operatorname{rot}[\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}] + \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{a}\right).$$

15. Komplexe Vektoren.

Analog zu der Bildung komplexer Zahlen kann man auch *komplexe Vektoren* bilden, indem man setzt:

(1) $$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + i\,\mathfrak{b} \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

Ein solcher Vektor entbehrt natürlich jeder Anschaulichkeit; er ist aber gelegentlich mit Vorteil zu verwenden. Besonders häufig tritt ein Ausdruck auf von der Form:

(2) $$\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_0\, e^{i\omega t},$$

wo t die Zeit bedeutet. Der Realteil dieses Vektors ist dann offenbar:

(2') $$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \cos \omega t - \mathfrak{b}_0 \sin \omega t,$$

stellt also einen Vektor dar, welcher sowohl Richtung wie Größe nach von der Zeit periodisch abhängt.

Ein Vektor, für den:

(3) $$c^2 = a^2 - b^2 + 2i(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) = 0$$

ist, heißt ein *Nullvektor*. Für ihn muß $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$ sein, und $|\mathfrak{a}| = |\mathfrak{b}|$ Natürlich existieren auch *Einheitsvektoren* im Komplexen, für die $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$ ist, und:

(4) $$a^2 = b^2 + 1\,.$$

Eine Gleichung von der Form:

(5) $$\mathfrak{c} = k[\mathfrak{u}\,\mathfrak{c}] \quad (\mathfrak{u} \text{ reell})$$

hat im Reellen nur die triviale Lösung $\mathfrak{c} = 0$. Im Komplexen rechnen wir folgendermaßen:

$$(\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}) = c^2 = 0$$
$$(\mathfrak{u}\,\mathfrak{c}) = 0$$

d. h., falls $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + i\,\mathfrak{b}$ gesetzt wird, wird:

$$\mathfrak{a} \perp \mathfrak{u}$$
$$\mathfrak{b} \perp \mathfrak{u}$$
$$\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}, \quad |\mathfrak{a}| = |\mathfrak{b}|$$

ferner ergibt sich:

(6) $$\mathfrak{c} = k^2[\mathfrak{u}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{c}]] = -k^2(\mathfrak{c}\,u^2 - \mathfrak{u}(\mathfrak{u}\,\mathfrak{c}))$$

also:

(7) $$k^2 u^2 = -1$$

oder:

(7′) $$k = \pm \frac{i}{u}.$$

Diese Gleichung stellt also eine *Bedingungsgleichung* für die Lösbarkeit der Ausgangsgleichung dar.

Die explizite Lösung läßt sich unter Verwendung eines willkürlichen reellen Vektors $\mathfrak{f}$ folgendermaßen schreiben:

(8) $$\mathfrak{c} = [\mathfrak{u}\,\mathfrak{f}] + \frac{i}{u}[\mathfrak{u}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{f}]].$$

Anwendung findet diese Rechnungsart z. B. bei der Lösung der *Vektordifferentialgleichung*:

(9) $$\frac{d\mathfrak{c}}{dt} = [\mathfrak{u}\,\mathfrak{c}].$$

Die Anschauung lehrt unmittelbar, daß durch diese Gleichung ein Vektor definiert wird, der um eine feste Achse $\mathfrak{u}$ „*präzessiert*".

Wir machen den Ansatz:

(10) $$\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_0 e^{i\omega t} + \alpha\,\mathfrak{u}$$

und erhalten:

(11) $$\mathfrak{c}_0 = -\frac{i}{\omega}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{c}_0].$$

Aus unserer obigen Bedingungsgleichung für k folgt unmittelbar:

(12) $$\omega = u$$

α ist eine beliebige Konstante.

Sowohl der Realteil, wie der Imaginärteil der definitiven Lösung, sowie auch eine beliebige lineare Kombination von beiden ist selbst eine Lösung.

B. Koordinatenmäßige Formulierung der Vektoranalysis im n-dimensionalen Raume.

1. Vektorkomponenten.

Analog zum dreidimensionalen ist jeder Vektor im n-dimensionalen Raume aus n Grundvektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_n$ darzustellen in der Form:

(1) $$\mathfrak{a} = a^1\mathfrak{e}_1 + a^2\mathfrak{e}_2 + \cdots + a^n\mathfrak{e}_n = \sum_i a^i\mathfrak{e}_i$$

(falls die $\mathfrak{e}_i$ linear unabhängig voneinander sind). Die $a^1, a^2, \ldots, a^n$ heißen die ***kontravarianten Komponenten*** von $\mathfrak{a}$ (bezogen auf die

Grundvektoren). Bildet man die zu den $\mathfrak{e}_i$ reziproken Vektoren $\mathfrak{e}^i$, so daß $(\mathfrak{e}^i \mathfrak{e}_k) = 1$ für $i = k$ und $= 0$ für $i \neq k$ wird, so ist auch die Darstellung

$$\text{(2)} \qquad \mathfrak{a} = a_1 \mathfrak{e}^1 + a_2 \mathfrak{e}^2 + \dots + a_n \mathfrak{e}^n$$

möglich. Die a_n heißen die ***kovarianten Komponenten*** von $\mathfrak{a}$.

In einem willkürlichen (krummlinigen) Koordinatensystem[1] $x^1, x^2, x^3, \dots$ legt man die Grundvektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ an jeder Stelle in die Tangentenrichtungen der dort sich kreuzenden Koordinatenkurven $x^1 = \text{const}$, $x^2 = \text{const}$, $x^3 = \text{const}$ usw. und wählt die Beträge $|\mathfrak{e}_1|$, $|\mathfrak{e}_2|$, $|\mathfrak{e}_3|$ usw. entsprechend dem metrischen Gefälle der Koordinatenmaßzahlen $x^1, x^2, x^3 \dots$ an dieser Stelle. D. h. der Vektor $d\mathfrak{s}$ mit der infinitesimalen Länge ds soll gegeben werden durch

$$\text{(3)} \qquad d\mathfrak{s} = \mathfrak{e}_1 dx^1 + \mathfrak{e}_2 dx^2 + \mathfrak{e}_3 dx^3 + \dots$$

Die dx^i sind also die kontravarianten Komponenten des Vektors $d\mathfrak{s}$, und die Grundvektoren sind bestimmt durch

$$\text{(4)} \qquad \mathfrak{e}_1 = \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial x^1}, \quad \mathfrak{e}_2 = \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial x^2}, \quad \mathfrak{e}_3 = \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial x^3}, \dots$$

Die $\mathfrak{e}_i$ geben die *metrischen* Verhältnisse im krummlinigen Koordinatensystem an. Sie genügen den Gleichungen

$$\text{(5)} \qquad \frac{\partial \mathfrak{e}_i}{\partial x^k} = \frac{\partial \mathfrak{e}_k}{\partial x^i}.$$

Es wird ferner

$$(ds)^2 = (dx^1)^2 \mathfrak{e}_1^2 + 2\, dx^1 \cdot dx^2 (\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2) + \dots$$

Zur Abkürzung schreibt man oft:

$$(\mathfrak{e}_1)^2 = g_{11}, \quad (\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2) = g_{12}, \quad \text{usw.}$$
$$(\mathfrak{e}^1)^2 = g^{11}, \quad (\mathfrak{e}^1 \mathfrak{e}^2) = g^{12}, \quad \text{usw.}$$

Es wird daher

$$\text{(6)} \qquad (ds)^2 = \sum_i \sum_k g_{ik}\, dx^i \cdot dx^k.$$

ds heißt das „Linienelement" des Koordinatensystems. Man pflegt neuerdings die Summenzeichen fortzulassen und fordert, *daß über jeden Index zu summieren ist, der in einem Gliede zweimal vorkommt.*

Man schreibt also:

$$\text{(7)} \qquad (ds)^2 = dx^i dx^k g_{ik} = dx^i dx^k (\mathfrak{e}_i \mathfrak{e}_k)$$
$$a^2 = a^i a^k g_{ik} = a^i a^k (\mathfrak{e}_i \mathfrak{e}_k) = a_i a_k g^{ik} = a_i a_k (\mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^k)$$
$$= a_i a^k (\mathfrak{e}^i \mathfrak{e}_k) = a_i a^i.$$

Ebenso

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = a^i b^k g_{ik} = a_i b^i = a^i b_i \quad \text{usw.}$$

---

[1]) Bei zeitabhängigen Koordinatensystemen vgl. S. 191.

Man beachte noch folgende Relationen:

(8)
$$a^i = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{e}^i); \quad a_i = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{e}_i)$$
$$a_i = g_{ik}\,a^k; \quad a^i = g^{ik}\,a_k$$
$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{e}^i)(\mathfrak{e}_i\,\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}).$$

Zur speziellen Rechnung ist die Verwendung der g_{ik} meist vorteilhafter als die der Vektoren $\mathfrak{e}_i$.

Die Größen g_{ik} bestimmt man am bequemsten durch Aufstellung der Form des Linienelementes.

Die Größen g^{ik} findet man aus diesen, indem man aus den g_{ik} die Determinante $|g|$ bildet. Nennt man G_{ik} die Unterdeterminante zu g_{ik}, so ist $g^{ik} = \frac{G_{ik}}{|g|}$. $\sqrt{g}$ ist gleich dem Volumen des aus den Grundvektoren $\mathfrak{e}_i$ gebildeten Parallelepipeds.

2. Tensorkomponenten.

Die Beziehung

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{T}(\mathfrak{b}) = \sum_n \mathfrak{p}_n (\mathfrak{q}_n\,\mathfrak{b})\ ^{1)}$$

schreibt sich unter Weglassung der Summenzeichen über zweimal vorkommende Indizes:

(1)
$$a_i = p_{ni}(q_{nk}\,\mathfrak{b}^k) = T_{ik}\,\mathfrak{b}^k;$$

wo

$$T_{ik} = p_{ni}\,q_{nk}$$

bedeutet. T_{ik} heißen die *kovarianten* Komponenten des Tensors. (Es ist $T_{ik} = \mathfrak{T}\,\mathfrak{e}_i\,\mathfrak{e}_k$.) Entsprechend gilt:

(2)
$$a^i = T^{ik}\,b_k, \quad \text{wo} \quad T^{ik} = p_n^i\,q_n^k \text{ ist.}$$

T^{ik} heißen die *kontravarianten* Komponenten des Tensors $T^{ik} = \mathfrak{T}\,\mathfrak{e}^i\,\mathfrak{e}^k$. Ebenso gilt:

$$a^i = T_k^i\,b^k, \quad \text{wo} \quad T_k^i = p_n^i\,q_{nk} \text{ ist.}$$

T_k^i heißen die *gemischten* Komponenten des Tensors ($T_k^i = \mathfrak{T}\,\mathfrak{e}^i\,\mathfrak{e}_k$). Es ist also

$$T_{ik} = T_i^l\,(\mathfrak{e}_k\,\mathfrak{e}_l) = T_i^l\,g_{lk}$$

und

$$T_{ik} = T^{lm}\,g_{il}\,g_{km}.$$

Der Tensor ist symmetrisch, wenn $T_{ik} = T_{ki}$ ist. Der Tensor ist schiefsymmetrisch oder antisymmetrisch, wenn $T_{ik} = -T_{ki}$ ist. Auch die Größen g_{ik} sind die kovarianten Komponenten eines symmetrischen Tensors, nämlich des Einheitstensors $\mathfrak{E}$, wo $\mathfrak{a} = \mathfrak{E}\,\mathfrak{a}$ (vgl. S. 164). Hier ist $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{e}_n$, $\mathfrak{q}_n = \mathfrak{e}^n$ zu setzen.

[1]) Die Summe über den Index n muß zur vollen Allgemeinheit im n-Dimensionalen n unabhängige Glieder enthalten.

3. Tensoren höheren Grades.

Tensoren höheren Grades sind entsprechend zu bilden. Z. B.

$$(1) \qquad \begin{cases} T_{ikl} = \sum_n p_{ni} q_{nk} r_{nl} \\ T^i_{kl} = \sum_n p^i_n q_{nk} r_{nl} \quad \text{usw.} \end{cases}$$

Vektoren kann man hiernach auch als Tensoren 1. Grades, Skalare als Tensoren 0. Grades bezeichnen.

4. 3-Indizes-Symbole.

Der im weiteren häufig vorkommende Ausdruck

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{is}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i}\right)$$

wird abgekürzt durch die Form:

$$\begin{bmatrix} r\,s \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\,r \\ i \end{bmatrix}$$

und $g^{ij}\begin{bmatrix} r\,s \\ i \end{bmatrix}$ durch

$$\begin{Bmatrix} r\,s \\ j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s\,r \\ j \end{Bmatrix} = -\Gamma^j_{rs}.$$

Γ^j_{rs} ist kein Tensor.

Es gilt:

$$(1) \qquad \begin{bmatrix} r\,i \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s\,i \\ r \end{bmatrix} = \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i}.$$

$$(2) \qquad \begin{Bmatrix} i\,r \\ i \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^r} = \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x^r} = \operatorname{div} \mathfrak{e}_r = \left(\mathfrak{e}^i \frac{\partial \mathfrak{e}_r}{\partial x^i}\right).$$

In den Grundvektoren ausgedrückt ist:

$$(3) \qquad \begin{bmatrix} r\,s \\ i \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial \mathfrak{e}_s}{\partial x^r}\,\mathfrak{e}_i\right) = \left(\frac{\partial \mathfrak{e}_r}{\partial x^s}\,\mathfrak{e}_i\right)$$

und

$$(4) \qquad \begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix} = -\left(\frac{\partial \mathfrak{e}^i}{\partial x^r}\,\mathfrak{e}_s\right) = \left(\mathfrak{e}^i \frac{\partial \mathfrak{e}_s}{\partial x^r}\right) = \left(\mathfrak{e}^i \frac{\partial \mathfrak{e}_r}{\partial x^s}\right).$$

5. Transformationen.

Beim Übergang von den krummlinigen Koordinaten x^i zu neuen krummlinigen Koordinaten transformieren sich die kontravarianten Komponenten des *Linienelements* (unter Fortlasssung der Summenzeichen):

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\,dx^k.$$

Nach demselben Gesetz transformieren sich die kontravarianten Komponenten eines *Vektors* $\mathfrak{a}$

$$a^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} a^k .$$

Die kovarianten Komponenten transformieren sich durch

$$a_{i'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} a_k .$$

Daher wird für jede Transformation

$$a_i b^i = a_i' b^{i'} = a^i b_i = a^{i'} b_i' = \text{Invariante (Skalar)}.$$

Die Komponenten eines *Tensors* 2. *Grades* transformieren sich wie die Produkte der Komponenten zweier Vektoren, und zwar T^{ik} wie $(a^i b^k)$, T_{ik} wie $(a_i b_k)$, T_i^k wie $(a_i b^k)$. Also

$$T'_{ik} = \frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial x^{k'}} \cdot T_{mn}.$$

$$T^{ik'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^n} \cdot T^{mn}$$

$$T_i^{k'} = \frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}} \cdot \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^n} \cdot T_m^n .$$

Es wird daher für jede Transformation $T_{ik} S^{ik}$ eine Invariante (Skalar), wenn $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{S}$ Tensoren sind.

Umgekehrt: Ist für jeden beliebigen Tensor $\mathfrak{S}$ die Größe $T_{ik} S^{ik}$ ein Skalar, so ist $\mathfrak{T}$ ein Tensor.

Entsprechendes gilt für Tensoren beliebigen Grades.

Zusammenstellung der wichtigsten Invarianten:

$$a^2 = a_i a^i, \quad (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) = a_i b^i = a^i b_i$$

$$(\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]) = \sqrt{g} \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \quad \text{(im Dreidimensionalen)}.$$

$$|\mathfrak{T}| = T_i^i = T_{ik} g^{ki} = T^{ik} g_{ik}$$

$$(\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{T}) = T_{ik} T^{ik} = T_k^i T_i^k \quad (\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{S}) = T_{ik} S^{ik}$$

$$|T| = |T_k^i| \text{ (Determinante)}.$$

$$\mathfrak{T}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = T_{ik} a^i b^k$$

6. Verjüngung und Erweiterung.

Aus einem Tensor T^{ik} erhält man durch Multiplikation mit g_{ik} den Skalar $|\mathfrak{T}| = T^{ik} g_{ik}$, aus T_j^{ik} den Vektor $t_j = T_j^{ik} g_{ik}$ usw. Diese Operation, die den Grad eines Tensors um 2 erniedrigt, heißt Verjüngung.

Durch Differentiation erhält man umgekehrt aus Tensoren solche höheren Grades (Erweiterung), durch Kombination mit Verjüngung auch solche niederen Grades. Bei der Differentiation ist zu beachten, daß die $\mathfrak{e}_i$ mit zu differenzieren sind[1]). Dadurch erhält man unter Benutzung der 3-Indizes-Symbole u. a. folgende Ausdrücke:

$$(1)\quad \begin{cases} a_i = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^i} & (\mathfrak{a} = \operatorname{grad} \varphi) \\ a_{ik} = \dfrac{\partial b_i}{\partial x^k} - \begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix} b_r & (\mathfrak{A} = \operatorname{grad} \mathfrak{b}) \text{ vgl. S. 167.} \\ a_k{}^i = \dfrac{\partial b^i}{\partial x^k} + \begin{Bmatrix} k\,r \\ i \end{Bmatrix} b^r & \\ a_{ikl} = \dfrac{\partial b_{ik}}{\partial x^l} - \begin{Bmatrix} i\,l \\ r \end{Bmatrix} b_{rk} - \begin{Bmatrix} k\,l \\ r \end{Bmatrix} b_{ir} & \\ a^i_{kl} = \dfrac{\partial b_k^i}{\partial x^l} + \begin{Bmatrix} l\,r \\ i \end{Bmatrix} b_k{}^r - \begin{Bmatrix} k\,l \\ r \end{Bmatrix} b_r{}^i & \\ a_l^{ik} = \dfrac{\partial b^{ik}}{\partial x^l} + \begin{Bmatrix} l\,r \\ i \end{Bmatrix} b^{rk} + \begin{Bmatrix} l\,r \\ k \end{Bmatrix} b^{ir} & \end{cases}$$

und durch Kombination u. a.

$$(2)\quad \begin{cases} c_{ik} = a_{ik} - a_{ki} = \dfrac{\partial b_i}{\partial x^k} - \dfrac{\partial b_k}{\partial x^i} \\ c^i = \dfrac{\partial a^i}{\partial x^k} b^k + \begin{Bmatrix} k\,r \\ i \end{Bmatrix} a^r b^k; \quad (\mathfrak{c} = (\mathfrak{b} \operatorname{grad}) \mathfrak{a}). \end{cases}$$

Durch Kombination mit Verjüngung findet man u. a.

$$3)\quad \psi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}\, a^i)}{\partial x^i} \qquad \left(\psi = \operatorname{div} \mathfrak{a} = \left(\mathfrak{e}^i \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial x^i}\right)\right)$$

$$(4)\quad \begin{cases} a_i = \dfrac{1}{\sqrt{g}} \cdot \dfrac{\partial(\sqrt{g}\, T_i{}^k)}{\partial x^k} - \begin{Bmatrix} i\,r \\ s \end{Bmatrix} T_s{}^r & (\mathfrak{a} = \operatorname{div} \mathfrak{T}) \\ a^i = \dfrac{1}{\sqrt{g}} \cdot \dfrac{\partial(\sqrt{g}\, T^{ki})}{\partial x^k} + \begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix} T^{rs} & \end{cases}$$

$$(5)\quad \psi = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g} \cdot g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}\right) \qquad (\psi = \Delta \varphi)$$

---

[1]) $d\mathfrak{a} = \dfrac{\partial}{\partial x^k}(a^i \mathfrak{e}_i)\, dx^k = a^i \dfrac{\partial \mathfrak{e}_i}{\partial x^k} dx^k + \mathfrak{e}_i \dfrac{\partial a^i}{\partial x^k} dx^k$

$$(d\mathfrak{a})^l = d\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{e}^l = \left(\frac{\partial a^l}{\partial x^k} + a^i \left(\mathfrak{e}^l \frac{\partial \mathfrak{e}_i}{\partial x^k}\right)\right) dx^k = \left(\frac{\partial a^l}{\partial x^k} + \begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix} a^i\right) dx^k = a_k{}^l\, dx^k$$

d. h. das Differential der Komponente ist *nicht* gleich der Komponente des Differentials: $d(\mathfrak{a}^l) \neq (d\mathfrak{a})^l$.

7. Erweiterung und Verjüngung in Anwendung auf den Tensor g_{ik}.

Für den Tensor g_{ik} erhält man speziell:

(1) $$\frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial \sqrt{g}\, g^{ik}}{\partial x^k} + \left\{ {r\,s \atop i} \right\} g^{rs} = 0$$

(2) $$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + \left\{ {l\,r \atop i} \right\} g^{rk} + \left\{ {l\,r \atop k} \right\} g^{ir} = 0$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \left\{ {l\,k \atop r} \right\} g_{ir} - \left\{ {l\,i \atop r} \right\} g_{rk} = 0$$

An Tensoren höheren Grades ist aus g_{ik} nur der folgende abzuleiten

(3) $$R^i{}_{jhk} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ {j\,h \atop i} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^h} \left\{ {j\,k \atop i} \right\} - \left\{ {r\,h \atop i} \right\} \left\{ {j\,k \atop r} \right\} + \left\{ {r\,k \atop i} \right\} \left\{ {j\,h \atop r} \right\}$$

und hieraus durch Verjüngung ein anderer Tensor 2. Grades

(4) $$R_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ {i\,r \atop r} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^r} \left\{ {i\,k \atop r} \right\} + \left\{ {i\,r \atop s} \right\} \left\{ {k\,s \atop r} \right\} - \left\{ {i\,k \atop r} \right\} \left\{ {r\,s \atop s} \right\}$$

und der Skalar

$$R = g^{ik} R_{ik}.$$

Die Größe $R^i{}_{jhk}$ heißt der „*Riemann-Christoffelsche* Krümmungstensor".

Das Verschwinden dieses Tensors ist die Bedingung dafür, daß die n-dimensionale Mannigfaltigkeit, ausgemessen mit dem Linienelement ds, die *Euklidische* Geometrie erfüllt.

In den Grundvektoren ausgedrückt ist

$$R^i{}_{jhk} = \left(\mathfrak{e}^i \left\{ \frac{\partial}{\partial x^h} \left(\frac{\partial \mathfrak{e}_j}{\partial x^k} \right) - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \mathfrak{e}_j}{\partial x^h} \right) \right\} \right).$$

Die Differentialgleichung einer geraden Linie, d. h. einer Linie, für die die Bogenlänge $\int ds$ zwischen je zwei ihrer Punkte ein Minimum ist (geodätische Linie), lautet:

(1) $$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \left\{ {h\,l \atop i} \right\} \frac{dx^h}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0.$$

Die Differentialgleichung einer Feldlinie (Kraftlinie) eines Vektorfeldes $\mathfrak{a}$ lautet

(2) $$\frac{dx^i}{ds} = a^i,$$

wo $a^i = f^i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist.

Verschiebt man einen Vektor $\mathfrak{a}$ aus dem Punkte $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ungeändert und parallel zu sich (Verpflanzung) um $\delta\mathfrak{s}$, so ändern sich seine Komponenten a^i zu $a^i + \delta a^i$ und es gilt

(3) $$\delta a^i = -\begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix} a^r \delta x^s$$

bzw.

$$\delta a_i = \begin{Bmatrix} i\,s \\ r \end{Bmatrix} a_r \delta x^s .$$

Setzt man diese Parallelverschiebung von Punkt zu Punkt längs einer geschlossenen Kurve fort, so lautet die Bedingung dafür, daß die Komponenten a^i wieder ihren ursprünglichen Wert annehmen:

(4) $$R^i{}_{j,hk} = 0 .$$

8. Orthogonale Koordinaten im 3-dimensionalen Raum.

(Im folgenden ist jedes Summenzeichen ausgeschrieben!)

In orthogonalen Koordinatensystemen ist es vorteilhaft, ein anderes System von Grundvektoren zu verwenden, nämlich *Einheitsvektoren* $\mathfrak{i}_1\,\mathfrak{i}_2\,\mathfrak{i}_3 \ldots$ in Richtung der früheren $\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{e}_2\,\mathfrak{e}_3 \ldots$. Hier werden die $\mathfrak{i}_k$ mit ihrem reziproken $\mathfrak{i}^k$ identisch. Es gibt also auch nur eine Art von Komponenten, die als *physikalische Komponenten* bezeichnet werden sollen, da sie in der Physik häufig verwandt werden. Sie sind die Beträge der komponierenden Vektoren.

Es ist hier also zu schreiben

$$\mathfrak{a} = \bar{a}_1 \mathfrak{i}_1 + \bar{a}_2 \mathfrak{i}_2 + \bar{a}_3 \mathfrak{i}_3 ,$$

wo

$$\bar{a}_i = a^i e_i = \frac{a_i}{e_i} = \sqrt{a_i a^i}$$

ist, wenn man mit e_i den Betrag von $\mathfrak{e}_i$ bezeichnet, der aus dem Linienelement

$$ds = \sqrt{e_1^2 (dx^1)^2 + e_2^2 (dx^2)^2 + \cdots}$$

zu entnehmen ist.

Der Betrag von $\mathfrak{e}^i$ ist hier gleich $\frac{1}{e_i}$.

Die physikalischen Komponenten $\bar{a}_i$ sind also die geometrischen Mittel der kontravarianten und kovarianten Komponenten.

Hieraus folgen die Formeln:

$$a^2 = \sum_i \bar{a}_i^2 ; \quad (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) = \sum_i \bar{a}_i \bar{b}_i .$$

Die Tensorrelation $\mathfrak{a} = \mathfrak{T}\,\mathfrak{b}$ schreibt sich:

$$\bar{a}_i = \sum_k \overline{T}_{ik} \bar{b}_k ,$$

wobei die *physikalischen Komponenten* des *Tensors* sich berechnen durch

$$\overline{T}_{ik} = \frac{T_{ik}}{e_i e_k} = T^{ik} \cdot e_i e_k = T^i{}_k \frac{e_i}{e_k} .$$

Für die Transformation der für die allgemeinen Komponenten gefundenen Formeln in solche mit physikalischen Komponenten gelten also folgende Beziehungen:

$$a^i = \frac{\bar{a}_i}{e_i}; \quad a_i = \bar{a}_i e_i$$

$$T_{ik} = \bar{T}_{ik} e_i e_k; \quad T^{ik} = \frac{\bar{T}_{ik}}{e_i e_k}; \quad T^i{}_k = \bar{T}_{ik} \frac{e_k}{e_i}.$$

dx^i ist hier natürlich keine Vektorkomponente, sondern nur

$$dx^i e_i = \overline{ds}_i.$$

Die Größen g_{ik} verschwinden für $i \neq k$, für $i = k$ ist

$$g_{ii} = e_i^2; \quad g^{ii} = \frac{1}{e_i^2}$$

zu setzen und

$$\sqrt{g} = e_1 e_2 e_3 \ldots$$

Die 3-Indizes-Symbole werden in orthogonalen Systemen einfach

$$\left\{ {ik \atop l} \right\} = \frac{1}{e_l^2}\left((lk)\, e_k \cdot \frac{\partial e_k}{\partial x^i} + (li)\, e_i \cdot \frac{\partial e_i}{\partial x^k} - (ik)\, e_k \cdot \frac{\partial e_k}{\partial x^l}\right),$$

wo die Symbole (lk) usw. 1 bzw. 0 bedeuten, je nachdem $l = k$ oder $l \neq k$ ist, d. h.

$$\left\{ {ik \atop l} \right\} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k \neq l \neq i$$

$$= -\frac{e_k}{e_l^2} \cdot \frac{\partial e_k}{\partial x^l} \quad \text{für} \quad i = k \neq l$$

$$= \frac{1}{e_i} \cdot \frac{\partial e_i}{\partial x^k} \quad \text{für} \quad i = l \neq k$$

$$= \frac{1}{e_i} \cdot \frac{\partial e_i}{\partial x^i} \quad \text{für} \quad i = l = k.$$

Durch diese Beziehungen transformieren sich die Formeln von S. 175 folgendermaßen in physikalische Komponenten:

$$\bar{a}_i = \frac{1}{e_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \qquad (\mathfrak{a} = \operatorname{grad} \varphi)$$

$$\bar{a}_{ik} = \frac{1}{e_i e_k}\left(\frac{\partial \bar{b}_i e_i}{\partial x^k} - \sum_r \frac{\bar{b}_r e_r}{e_r^2}\left\{(rk) \cdot e_k \cdot \frac{\partial e_k}{\partial x^i} + (ri) \cdot e_i \frac{\partial e_i}{\partial x^k} - (ik) \cdot e_k \cdot \frac{\partial e_k}{\partial x^r}\right\}\right)$$

$$= \frac{1}{e_i e_k}\left(\frac{\partial \bar{b}_i e_i}{\partial x^k} - \bar{b}_k \cdot \frac{\partial e_k}{\partial x^i} - \bar{b}_i \cdot \frac{\partial e_i}{\partial x^k} + (ik) \sum_r \frac{\bar{b}_r}{e_r} e_k \cdot \frac{\partial e_k}{\partial x^r}\right)$$

$$= \frac{1}{e_k}\left(\frac{\partial \bar{b}_i}{\partial x^k} - \frac{\bar{b}_k}{e_i} \cdot \frac{\partial e_k}{\partial x^i} + (ik) \cdot \sum_r \frac{\bar{b}_r}{e_r} \cdot \frac{\partial e_k}{\partial x^r}\right)$$

$$\bar{a}_{ikl} = \frac{1}{e_l}\left(\frac{\partial \bar{b}_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\bar{b}_{lk}}{e_i} \cdot \frac{\partial e_l}{\partial x^i} - \frac{\bar{b}_{il}}{e_k} \cdot \frac{\partial e_l}{\partial x^k} + (il) \sum_r \frac{\bar{b}_{rk}}{e_r} \cdot \frac{\partial e_l}{\partial x^r}\right.$$

$$\left. + (kl) \sum_r \frac{\bar{b}_{ir}}{e_r} \cdot \frac{\partial e_l}{\partial x^r}\right)$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,\frac{\bar{a}_i}{e_i}\right) \qquad (\psi = \operatorname{div} \mathfrak{a})$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\cdot\frac{1}{e_i^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right) \qquad (\psi = \Delta\varphi)$$

$$\bar{a}_i = \frac{e_i}{\sqrt{g}}\left(\sum_r \frac{\partial}{\partial x^r}\left(\sqrt{g}\cdot\frac{\bar{T}_{ir}}{e_i e_r}\right) + \sum_r \frac{(\bar{T}_{ri}+\bar{T}_{ir})}{e_i e_r}\cdot\frac{\partial e_i}{\partial x^r} - \sum_r \frac{\bar{T}_{rr}}{e_i e_r}\cdot\frac{\partial e_r}{\partial x^i}\right)$$
$$(\mathfrak{a} = \operatorname{div} \mathfrak{T})$$

Ist hierin $\bar{T}_{ik}$ ein antisymmetrischer Tensor $(\bar{T}_{ik} = -\bar{T}_{ki})$, so verschwinden die beiden letzten Glieder.

Ist speziell

$$\bar{T}_{ik} = \bar{a}_{ik} - \bar{a}_{ki} = \frac{1}{e_i e_k}\left(\frac{\partial(\bar{b}_i e_i)}{\partial x^k} - \frac{\partial(\bar{b}_k e_k)}{\partial x^i}\right),$$

so wird

$$\bar{a}_i = \frac{e_i}{\sqrt{g}}\cdot\sum_r \frac{\partial}{\partial x^r}\left(\sqrt{g}\,\frac{\left(\frac{\partial(\bar{b}_i e_i)}{\partial x^r} - \frac{\partial(\bar{b}_r e_r)}{\partial x^i}\right)}{e_i^2 e_r^2}\right) \quad (\mathfrak{a} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{b}).$$

Dieser Ausdruck ist in zwei Teile zerlegbar:

$$\bar{a}_i = \frac{1}{e_i}\cdot\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\cdot\sum_r \frac{\partial}{\partial x^r}\left(\sqrt{g}\,\frac{\bar{b}_r}{e_r}\right)\right) - \bar{c}_i,$$

wo der erste Teil gleich grad div $\mathfrak{b}$, der zweite Teil $\mathfrak{c} = \Delta\mathfrak{b}$ bedeutet.

$\bar{S}_{ik} = \frac{\bar{a}_{ik}+\bar{a}_{ki}}{2}$ ist der „Deformationstensor".

Er ist symmetrischer in der Form schreibbar:

$$\bar{S}_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{e_i}{e_k}\cdot\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\bar{b}_i}{e_i}\right) + \frac{e_k}{e_i}\cdot\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\bar{b}_k}{e_k}\right)\right) + \frac{(i\,k)}{e_k}\sum_r \frac{\bar{b}_r}{e_r}\cdot\frac{\partial e_k}{\partial x^r}.$$

Antisymmetrische Tensoren haben im 3-Dimensionalen nur 3 Komponenten. Deutet man diese als die Komponenten eines Vektors, so ist dieser hierdurch in einer vom Koordinatensystem unabhängigen Weise definiert, indem man setzt

$$\bar{T}_{12} = \bar{a}_3; \quad \bar{T}_{23} = \bar{a}_1; \quad \bar{T}_{31} = a_2.$$

Z. B. liefert der Tensor $\bar{a}_i\bar{b}_k - \bar{a}_k\bar{b}_i = \bar{c}_l$ die Definition des Vektors $\mathfrak{c} = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$, ferner der Tensor

$$\bar{a}_{ik} - \bar{a}_{ki} = \frac{1}{e_i e_k}\cdot\left(\frac{\partial(\bar{b}_i e_i)}{\partial x^k} - \frac{\partial(\bar{b}_k e_k)}{\partial x^i}\right) = c_l$$

die Definition des Vektors $\mathfrak{c} = \operatorname{rot}\mathfrak{b}$.

Diese Vektoren heißen axiale im Gegensatz zu den anderen, die als polar bezeichnet werden.

Die Operation rot, angewandt auf einen axialen Vektor, ist identisch mit der Operation div, angewandt auf den antisymmetrischen Tensor (vgl. rot rot $\mathfrak{b}$).

9. Komponenten in Cartesischen Koordinaten.

In Cartesischen Koordinaten werden die drei Komponentenarten miteinander identisch, weil

(1) $$e_1 = e_2 = e_3 = 1 \quad \text{und} \quad (\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2) = (\mathfrak{e}_2 \mathfrak{e}_3) = (\mathfrak{e}_3 \mathfrak{e}_1) = 0$$

ist. Wir bezeichnen die Komponenten von $\mathfrak{a}$ mit a_x, a_y, a_z, gleich den Projektionen von $\mathfrak{a}$ auf die x, y, z-Achse.

Das innere Produkt $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})$ wird

(3) $$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Das äußere Produkt $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$ hat die Komponenten:

(4) $$\begin{aligned} [\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]_x &= a_y b_z - a_z b_y \\ [\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]_y &= a_z b_x - a_x b_z \\ [\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]_z &= a_x b_y - a_y b_x. \end{aligned}$$

Der Betrag eines Vektors $\mathfrak{a}$ wird:

(5) $$a = |\mathfrak{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

$(\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}])$ wird

(6) $$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix};$$

grad φ hat die Komponenten:

(7) $$\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

div $\mathfrak{a}$ wird:

(8) $$\operatorname{div} \mathfrak{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z};$$

rot $\mathfrak{a}$ hat die Komponenten:

(9) $$\begin{cases} \operatorname{rot}_x \mathfrak{a} = \dfrac{\partial a_z}{\partial y} - \dfrac{\partial a_y}{\partial z}, \\ \operatorname{rot}_y \mathfrak{a} = \dfrac{\partial a_x}{\partial z} - \dfrac{\partial a_z}{\partial x}, \\ \operatorname{rot}_z \mathfrak{a} = \dfrac{\partial a_y}{\partial x} - \dfrac{\partial a_x}{\partial y}. \end{cases}$$

(10) $$\Delta \varphi \text{ ist} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

$\Delta\,\mathfrak{a}$ hat die Komponenten:

$$(11)\qquad \Delta_x\,\mathfrak{a} = \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} = \Delta\, a_x \text{ usw.}$$

$(\mathfrak{a}\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{b}$ hat die Komponenten:

$$(12)\qquad (\mathfrak{a}\,\mathrm{grad})_x\,\mathfrak{b} = a_x\frac{\partial b_x}{\partial x} + a_y\frac{\partial b_x}{\partial y} + a_z\frac{\partial b_x}{\partial z} \text{ usw.}$$

Der *Gaußsche* Satz lautet:

$$(13)\ \int\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dv = \int\left(a_x\cos(nx) + a_y\cos(ny) + a_z\cos(nz)\right)df.$$

Der *Stokessche* Satz lautet:

$$(14)\qquad \int\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos(nx) + \ldots = \int\left(a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz\right).$$

Eine lineare Vektorfunktion stellt sich in der Form dar:

$$(15)\qquad \begin{cases} a_x = a_{0x} + a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z \\ a_y = a_{0y} + a_{21}\,x + x_{22}\,y + a_{23}\,z \\ a_z = a_{0z} + a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z \end{cases}$$

Die Zerlegung von $\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_0$ in einen quellenfreien Teil $\mathfrak{a}'$ und einen wirbelfreien Teil $\mathfrak{a}''$ liefert:

$$a_x = a_x' + a_x''$$

usw., wo

$$(16)\qquad \begin{cases} a_x' = \frac{1}{2}\{(a_{12} - a_{21})\,y + (a_{13} - a_{31})\,z)\} = u_y\,z - u_z\,y \\ a_y' = \frac{1}{2}\{(a_{21} - a_{12})\,x + (a_{23} - a_{32})\,z)\} = u_z\,x - u_x\,z \\ a_z' = \frac{1}{2}\{(a_{31} - a_{13})\,x + (a_{32} - a_{23})\,y)\} = u_x\,y - u_y\,x \end{cases}$$

und

$$(17)\qquad \begin{cases} a_x'' = a_{11}\,x + \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21})\,y + \frac{1}{2}(a_{13} + a_{31})\,z \\ a_y'' = \frac{1}{2}(a_{21} + a_{12})\,x + a_{22}\,y + \frac{1}{2}(a_{23} + a_{32})\,z \\ a_z'' = \frac{1}{2}(a_{31} + a_{13})\,x + \frac{1}{2}(a_{32} + a_{23})\,y + a_{33}\,z. \end{cases}$$

Drückt man die Abhängigkeit des Vektors $\mathfrak{a}$ vom Ort aus in der Form:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{A}\,\mathfrak{r},$$

so bezeichnet man die a_{ik} der Formel (15) als die Komponenten des Tensors $\mathfrak{A}$.

Schreibt man $\mathfrak{a}'' = \mathfrak{T}\,\mathfrak{r}$, so sind also die Größen a_{11}; $\frac{1}{2}(a_{12} + a_{21})$; $\frac{1}{2}(a_{13} + a_{31})$ usw. die Komponenten eines symmetrischen Tensors.

Entsprechend bezeichnet man die u_x, u_y, u_z als die Komponenten eines antisymmetrischen Tensors (vgl. S. 163).

$\varphi = \operatorname{div} \mathfrak{T} =$ hat die Komponenten:

(18) $$\begin{cases} p_x = \dfrac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial T_{xz}}{\partial z} \\ p_y = \dfrac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial T_{yz}}{\partial z} \\ p_z = \dfrac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{cases}$$

(19) $$(\mathfrak{T}\mathfrak{T}) = T_{xx}^2 + T_{yy}^2 + T_{zz}^2 + 2T_{xy}^2 + 2T_{xz}^2 + 2T_{yz}^2.$$

(20) $$|\mathfrak{T}| = T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}.$$

$$|T| = \begin{vmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{vmatrix}.$$

10. Komponenten in Polarkoordinaten (r, φ, ϑ).

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \sin^2\vartheta \, d\varphi^2 + r^2 d\vartheta^2; \quad e_1 = 1; \quad e_2 = r\sin\vartheta; \quad e_3 = r;$$

(1) $$g = r^4 \sin^2\vartheta.$$

3-Indizes-Symbole:

$$\begin{Bmatrix} 33 \\ 1 \end{Bmatrix} = -r, \qquad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{r}, \qquad \begin{Bmatrix} 13 \\ 3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{r},$$

$$\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = -r\sin^2\vartheta, \quad \begin{Bmatrix} 22 \\ 3 \end{Bmatrix} = -\sin\vartheta\cos\vartheta, \quad \begin{Bmatrix} 23 \\ 2 \end{Bmatrix} = \operatorname{ctg}\vartheta.$$

Wir bezeichnen

$$\bar{\mathfrak{a}}_1 = a_r, \quad \bar{\mathfrak{a}}_2 = a_\varphi, \quad \bar{\mathfrak{a}}_3 = a_\vartheta.$$

$\mathfrak{a} = \operatorname{grad}\psi$:

(2) $$a_r = \frac{\partial\psi}{\partial r}; \quad a_\varphi = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}; \quad a_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta},$$

(3) $$\operatorname{div}\mathfrak{a} = \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{2}{r}a_r + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\vartheta}{\partial\vartheta} + \frac{\operatorname{cotg}\vartheta}{r}a_\vartheta$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r)\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\, a_\vartheta)\right)$$

(4) $$\Delta\psi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\vartheta^2}$$

$$+ \frac{1}{r^2}\operatorname{cotg}\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}$$

(5) $$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right).$$

(6) $$\operatorname{rot}_r\mathfrak{a} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial a_\vartheta}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\, a_\varphi)\right)$$

(7) $$\operatorname{rot}_\varphi\mathfrak{a} = \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial\vartheta} - \frac{1}{r}\frac{\partial(r a_\vartheta)}{\partial r}$$

(8) $$\operatorname{rot}_\vartheta \mathfrak{a} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\, a_\varphi) - \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right).$$

(9) $$\Delta_r \mathfrak{a} = \frac{1}{r}\Delta(r\, a_r) - \frac{2}{r}\operatorname{div}\mathfrak{a}.$$

Zwischen den $a_x a_y a_z$ und den $a_r a_\varphi a_\vartheta$ bestehen die Gleichungen:

(10) $$\begin{cases} a_r = a_x \sin\vartheta\cos\varphi + a_y \sin\vartheta\sin\varphi + a_z\cos\vartheta \\ a_\varphi = -a_x\sin\varphi + a_y\cos\varphi \\ a_\vartheta = a_x\cos\vartheta\cos\varphi + a_y\cos\vartheta\sin\varphi - a_z\sin\vartheta \end{cases}$$

(11) $$\begin{cases} a_x = a_r\sin\vartheta\cos\varphi - a_\varphi\sin\varphi + a_\vartheta\cos\varphi\cos\vartheta \\ a_y = a_r\sin\vartheta\cos\varphi + a_\varphi\cos\varphi + a_\vartheta\sin\varphi\cos\vartheta \\ a_z = a_r\cos\vartheta + a_\vartheta\sin\vartheta \end{cases}$$

11. Komponenten in Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z).

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2 + dz^2;\quad e_1 = 1,\quad e_2 = \varrho,\quad e_3 = 1.$$

3-Indizes-Symbole:

$$\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = -\varrho;\quad \begin{Bmatrix}21\\2\end{Bmatrix} = 1,\quad \text{alle anderen} = 0.$$

(1) $$g = \varrho^2.$$

Wir bezeichnen:

$$\bar{\mathfrak{a}}_1 = a_\varrho;\quad \bar{\mathfrak{a}}_2 = a_\varphi;\quad \bar{\mathfrak{a}}_3 = a_z$$

(2) $$\mathfrak{a} = \operatorname{grad}\psi:\ \frac{\partial\psi}{\partial\varrho} = a_\varrho;\quad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = a_\varphi;\quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = a_z.$$

(3) $$\operatorname{div}\mathfrak{a} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}(\varrho\, a_\varrho) + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

(4) $$\operatorname{rot}_\varrho \mathfrak{a} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial a_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}$$

(5) $$\operatorname{rot}_\varphi \mathfrak{a} = \frac{\partial a_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial\varphi}$$

(6) $$\operatorname{rot}_z \mathfrak{a} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial(\varrho\, a_\varphi)}{\partial\varrho} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial a_\varrho}{\partial\varphi}$$

(7) $$\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi = \Delta\psi = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

Zwischen den a_x, a_y, a_z und den a_ϱ, a_φ, a_z bestehen die Gleichungen:

(8) $$\begin{cases} a_\varrho = a_x\cos\varphi + a_y\sin\varphi \\ a_\varphi = -a_x\sin\varphi + a_y\cos\varphi \\ a_z = + a_z. \end{cases}$$

$$
(9) \qquad \begin{cases} a_x = a_\varrho \cos\varphi - a_\varphi \sin\varphi \\ a_y = a_\varrho \sin\varphi + a_\varphi \cos\varphi \\ a_z = \qquad\qquad\qquad\qquad + a_z. \end{cases}
$$

Literatur:

Abraham: Theorie der Elektrizität, Bd. I (Leipzig: B. G. Teubner). — *Gans:* Vektoranalysis. (Leipzig: B. G. Teubner.) — *Runge:* Vektoranalysis (Leipzig: Hirzel).

Pauli (Enzyklopädie d. math. Wiss.): Relativitätstheorie. (Leipzig: B. G. Teubner.) — *Weil:* Zeit, Raum, Materie. (Berlin: Julius Springer.)

Elfter Abschnitt.

Mechanik.

A. Prinzipien der Mechanik.

1. Differentialprinzipien.

a) Newtonsche Bewegungsgleichungen.

Ein unter dem Einflusse einer Kraft $\mathfrak{K} = (X, Y, Z)$ sich bewegender freier Massenpunkt durchläuft in der Zeit t eine Bahn $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, die durch die Differentialgleichung gegeben ist:

$$(1)\qquad \left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X(x, y, z);\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y(x, y, z);\\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z(x, y, z); \end{aligned}\right\} \qquad \begin{gathered} m \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{K}\\ \text{Masse} \times \text{Beschleunigung} = \text{Kraft.} \end{gathered}$$

Das sind 3 Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die unbekannten Funktionen $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Die 6 in den Lösungen auftretenden Integrationskonstanten sind durch die *Anfangsbedingungen*, etwa durch

$$(2)\qquad \begin{aligned} x(t_0) &= x_0; & \dot{x}(t_0) &= u_0,\\ y(t_0) &= y_0; & \dot{y}(t_0) &= v_0,\\ z(t_0) &= z_0; & \dot{z}(t_0) &= w_0 \end{aligned}$$

gegeben.

b) Lagrangesche Bewegungsgleichungen 1. Art.

Ist der Massenpunkt nicht frei beweglich, sondern an irgendwelche Bedingungen gebunden, etwa an eine Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$, oder an eine Kurve $\varphi(x, y, z) = 0$, $\psi(x, y, z) = 0$, so ist die Bewegung bestimmt durch:

$$(1\text{a})\qquad \begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial x},\\ m\ddot{y} &= Y + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial y},\\ m\ddot{z} &= Z + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial z}. \end{aligned}$$

Das sind zusammen mit den Bedingungsgleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ 5 Gleichungen für die unbekannten Funktionen $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ und die unbekannten Konstanten (*Lagrange*schen Multiplikatoren) λ und μ.

Tritt die Zeit t explizite in den Nebenbedingungen auf, so ist t als Konstante zu behandeln. Bei Vorhandensein von mehreren Massenpunkten gelten die *Lagrange*schen bzw. *Newton*schen Bewegungsgleichungen für jeden einzelnen Massenpunkt. Die Beziehungen der einzelnen Massenpunkte zueinander sind durch die Nebenbedingungen festgelegt.

c) Das Prinzip des kleinsten Zwanges (Gauß).

Bewegt sich ein Massenpunkt unter dem Einfluß irgendwelcher treibender Kräfte nicht frei, sondern an die Erfüllung bestimmter Nebenbedingungen gebunden, so ist die wirklich stattfindende Bewegung derart, daß der „*Zwang*", den der Massenpunkt durch die Nebenbedingungen erfährt, in jedem Augenblick ein Minimum ist.

Der Zwang ist definiert durch:

$$(3) \quad Z = \frac{1}{m}(m\mathfrak{B} - \mathfrak{K})^2 \equiv \frac{1}{m}\{(m\ddot{x} - X)^2 + (m\ddot{y} - Y)^2 + (m\ddot{z} - Z)^2\}.$$

Sind keine Nebenbedingungen vorhanden, so liefert das *Gauß*sche Prinzip sofort die *Newton*schen, sind Bedingungen vorhanden, die *Lagrange*schen Bewegungsgleichungen.

Besteht das System aus mehreren Massenpunkten, so ist der „Zwang" gleich der Summe der Einzelzwänge zu setzen.

d) Das Prinzip der virtuellen Verrückungen.

Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten. Prinzip der Statik.

Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Gleichgewicht eines beliebigen materiellen Systems besteht darin, daß die Gesamtarbeit der treibenden Kräfte bei jeder *virtuellen*, d. h. mit den Bedingungen des Systems verträglichen Verrückung gleich Null ist.

$$(4) \quad \sum \mathfrak{K}_i \delta \mathfrak{s}_i \equiv \sum X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i = 0.$$

Es ist zu summieren über sämtliche Massenpunkte. Sind die Bedingungen zwischen den einzelnen Massenpunkten durch die Bedingungsgleichungen $\varphi^{(k)}(x_i, y_i, z_i) = 0$ gegeben, so bedeutet das für die zulässige virtuelle Verrückung:

$$(5) \quad \sum_i \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial z_i} \delta z_i = 0$$

und somit folgt als Gleichgewichtsbedingung:

(6) $$X_i - \left(\lambda_1 \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_i} + \ldots\right) = 0,$$

. . . .

worin $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ konstante *Lagrange*sche Multiplikatoren sind. — $\lambda_i \frac{\partial \varphi^{(h)}}{\partial x_i}$ ist die x_i-Komponente der „Zwangskraft", die der Bedingungsgleichung $g^{(h)} = 0$ äquivalent ist.

e) Das Prinzip von d'Alembert

führt die Behandlung dynamischer Probleme auf die Statik zurück, indem das negativ genommene Produkt aus Masse und Beschleunigung als *„Trägheitskraft"* eingeführt und wie eine treibende Kraft behandelt wird. Es wird verlangt, daß in jedem Augenblick Gleichgewicht zwischen sämtlichen Kräften herrscht, wofür das Prinzip der virtuellen Verrückungen die notwendige und hinreichende Bedingung gibt:

(7) $$\sum\left(\mathfrak{K} - m_i \frac{d^2 \mathfrak{s}_i}{dt^2}\right) \delta \mathfrak{s}_i = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum (X_i - m_i \ddot{x}_i)\, \delta x_i = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

Man bezeichnet die Differenz $\mathfrak{K} - m \frac{d^2 \mathfrak{s}}{dt^2}$ auch als „verlorene (nicht in Bewegung umgesetzte) Kraft" und spricht das *d'Alembert*sche Prinzip so aus: Bei der wirklich eintretenden Bewegung ist die virtuelle Arbeit (= Kraft $\times$ Weg) der verlorenen Kräfte gleich Null.

Sind keine Nebenbedingungen vorhanden, so ist das *d'Alembert*sche Prinzip mit den *Newton*schen Bewegungsgleichungen, sind Bedingungen vorhanden, so ist es mit den *Lagrange*schen Gleichungen identisch. Explizite auftretendes t ist als Konstante zu behandeln.

2. Integralprinzipien.

a) Das Prinzip von Hamilton.

Von allen Bewegungen, die mit den Rand- und Nebenbedingungen eines mechanischen Problems verträglich sind, ist die wirklich stattfindende Bewegung die, die das Integral

(8) $$\int_{t_1}^{t_2} (T - W)\, dt$$

zum Minimum macht. Darin bedeutet T die kinetische, W die potentielle Energie. $T - W = L$ heißt die *„Lagrange*sche Funktion".

Dieses Variationsproblem liefert drei Differentialgleichungen 2. Ordnung, Es sind die *„Lagrangeschen Gleichungen 2. Art"* (vgl. S. 192):

$$(9)\qquad \begin{array}{c} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}$$

Das *Hamiltonsche Prinzip* ist das allgemeinste und am weitesten reichende Grundprinzip der Mechanik. Es gilt für eine beliebige Zahl von Massenpunkten und für eine beliebige Zahl von Freiheitsgraden. Die Zeit t kann sowohl ein Potential U wie auch in den etwa vorhandenen Nebenbedingungen explizite auftreten. Es ist nicht wie die anderen Integralprinzipe an die Gültigkeit des Energiesatzes gebunden. Das Vorhandensein von Nebenbedingungen bietet keinerlei Schwierigkeit. Es tritt in diesem Falle in den *Lagrange*schen Gleichungen $L + \lambda\varphi$ an die Stelle von L. (Vgl. Variationsrechnung.)

b) Das Prinzip der kleinsten Wirkung.

Das Prinzip der kleinsten Aktion. Das Prinzip von *Euler*.

Bei der wirklich stattfindenden Bewegung wird das Integral $\int\limits_{t_0}^{t} T\,dt$ ein Minimum, verglichen mit allen anderen mit den Bedingungen verträglichen Bewegungen von der gleichen Energie E. Ausgangs- und Endpunkt, sowie Ausgangszeit werden bei der Variation festgehalten, die Endzeit dagegen nicht.

Das *Euler*sche Prinzip ist nicht auf das *Hamilton*sche zurückführbar. Es gilt nur für konservative Systeme. Die gewöhnlichen Methoden der Variationsrechnung sind nicht anwendbar, da die obere Grenze offen ist.

Als *„Prinzip der kleinsten Wirkung"* (*„Aktion"*) wird auch häufig das *Hamilton*sche bezeichnet.

c) Das Prinzip von Jacobi.

Findet unter dem Einflusse konservativer Kräfte (d. h. $T + W = \text{Const} = E$) zwischen den festen Punkten x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 eine Bewegung statt, so macht die wirklich durchlaufene Bahnkurve das Integral

$$(10)\qquad \int\limits_{x_0, y_0, z_0}^{x_1 y_1 z_1} \sqrt{E - W(x, y, z)}\, ds$$

zum Minimum. Durch dieses Variationsprinzip ist die Bahnkurve eindeutig bestimmt. Der zeitliche Ablauf der Bewegung folgt dann aus dem Energiesatz $T + W = \text{Const} = E$.

d) Die kanonischen Bewegungsgleichungen (Hamilton).

Tritt im Potential U die Zeit t nicht explizite auf, so lassen sich die *Lagrange*schen Gleichungen 2. Art auch schreiben:

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{dp_i}{dt} = \dfrac{\partial H(p, q)}{\partial q_i} \\[2ex] \dfrac{dq_i}{dt} = -\dfrac{\partial H(p, q)}{\partial p_i} \end{cases}.$$

Darin bedeuten die q_i die $3n$ *„generalisierten Lagekoordinaten“* (n Anzahl der Freiheitsgrade), die p_i die dazugehörigen *„generalisierten Impulse“*, definiert durch $p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ (wofür man, da das Potential eine reine Ortsfunktion ist, auch schreiben kann: $p_i = \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i}$ oder $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$). $H(p, q)$ ist die *Energiefunktion*

$$(12)\qquad H(p, q) \equiv T(p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n) + W(q_1 \dots q_n)$$ (vgl. S. 192).

e) Die Jacobische partielle Differentialgleichung.

Die Lösung der kanonischen Gleichungen gelingt oft bequem auf dem Wege über die *Jacobische Differentialgleichung*

$$(13)\qquad \frac{\partial S(q_1 \dots q_n)}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}; q_1 \dots q_n\right) = 0;$$

die man bekommt, wenn man in der Energiefunktion $H(p, q)$ die p_i bzw. durch $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ ersetzt. Kennt man eine Lösung $S(q_1 \dots q_n, \alpha_1 \dots \alpha_n, t)$ der *Jacobi*schen Differentialgleichung, só findet man die allgemeine Lösung der kanonischen Gleichung, indem man bildet: $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i$ und aus diesen n Gleichungen die q_i durch α, β und t ausdrückt. Da außerdem $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ ist, so sind die $2n$ Integrationskonstanten α, β durch die $2n$ Anfangsbedingungen $q_1^0, \dots, q_n^0, p_1^0, \dots, p_n^0$ bestimmt. Die *Jacobi*sche Funktion S gibt den Wert des *Hamilton*schen Integrals als Funktion des im Laufe der wirklich stattfindenden Bewegung erreichten Ortes. S heißt die *„Wirkungsfunktion“*.

B. Mechanik des einzelnen Massenpunktes.

1. Grundgesetz und Begriffe.

Zur Darstellung der Bewegung eines Massenpunktes benutzt man folgende Punktvektoren[1]:

Lage $\mathfrak{r}$ (Komponenten x^i).

Geschwindigkeit $\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt}$ $\left(v^i = \frac{dx^i}{dt}\right)$

Beschleunigung $\mathfrak{b} = \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}$ $\left(b^i = \frac{d^2x^i}{dt^2} + \left\{ {hl \atop i} \right\} \frac{dx^h}{dt}\frac{dx^l}{dt}\right)$.

Ist $\mathfrak{k}$ der Vektor der Kraft und m die Masse des Punktes, so lautet das *dynamische Grundgesetz* (*Newton*)

$$\mathfrak{k} = m\mathfrak{b} = m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} \qquad (k^i = mb^i) \tag{1}$$

$\mathfrak{p} = m\mathfrak{v}$ heißt *Impuls* oder *Bewegungsgröße*.

Daher

$$\mathfrak{k} = \frac{d\mathfrak{p}}{dt} \qquad \left(k^i = \frac{dp^i}{dt} + \left\{ {hl \atop i} \right\} \frac{p^h p^l}{m}\right) \tag{2}$$

Zerlegt man die Beschleunigung in Radial- und Tangentialbeschleunigung $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_r + \mathfrak{b}_t$, so wird

$$\mathfrak{b}_r = \frac{\mathfrak{R}}{R^2}v^2 = \frac{[\mathfrak{v}(\mathfrak{b}\mathfrak{v})]}{\mathfrak{v}^2}, \qquad \mathfrak{b}_t = \frac{\mathfrak{T}}{T}\frac{dv}{dt} = \frac{\mathfrak{v}(\mathfrak{b}\mathfrak{v})}{v^2} = \frac{\mathfrak{v}}{v}\frac{dv}{dt}.$$

Dabei bedeutet $\mathfrak{R}$ einen Vektor von Richtung und Betrag des Krümmungsradius der Bahn, $\mathfrak{T}$ einen Vektor in Richtung der Bahntangente.

$-m\mathfrak{b}_r$ heißt *Zentrifugalkraft*.

$$dA = (\mathfrak{k}\mathfrak{v})\cdot dt = (\mathfrak{k}\cdot d\mathfrak{r}) \tag{3}$$

heißt die bei der Verschiebung geleistete *Arbeit*

$$dA = (k_i v^i)\,dt = k_i\,dx^i$$

Es ist

$$dA = m\left(\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\cdot\mathfrak{v}\right)\cdot dt = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)dt = dT$$

$$dT = (\mathfrak{p}\,d\mathfrak{v}), \qquad p_i = \frac{\partial T}{\partial v^i}.$$

$T = \frac{mv^2}{2}$ heißt *kinetische Energie*

$$T = \frac{m}{2}(v^i v_i) = \frac{m}{2}(v^i v^k g_{ik}). \tag{4}$$

---

[1]) Im affinen Koordinatensystem wird $x^i = r^i$, d. h. nur in solchen sind die x^i die Komponenten des Vektors $\mathfrak{r}$ in Richtung vom Nullpunkt zum Aufpunkt. Dagegen sind allgemein die dx^i die Komponenten von $d\mathfrak{r}$.

Ist $\mathfrak{k}$ als Funktion des Ortes gegeben und darstellbar in der Form

$$\mathfrak{k} = \operatorname{grad} U = -\operatorname{grad} W \qquad \left(k_i = \frac{\partial U}{\partial x^i} = -\frac{\partial W}{\partial x_i}\right),$$

wo U bzw. W ein von $\mathfrak{v}$ unabhängiger Skalar ist, so heißt U die *Kräftefunktion* und $W = -U$ die *potentielle Energie*. Ist U auch von t unabhängig, so heißt eine solche Kraft $\mathfrak{k}$ *konservativ*. Dann gilt

(5)
$$dA = dU = -dW = dT$$
$$d(T+W) = 0 \quad (\textit{Erhaltung der Energie}).$$

2. Verschiedene Formen des Grundgesetzes.

In kovarianter Schreibweise mit Benutzung der Fundamentalvektoren (S. 171) wird für obige Größen

$$d\mathfrak{r} = \mathfrak{e}_i dx^i, \qquad \mathfrak{v} = \mathfrak{e}_i v^i, \qquad \mathfrak{p} = m\mathfrak{v} = mv^i\mathfrak{e}_i$$
$$\mathfrak{k} = k^i\mathfrak{e}_i, \qquad dU = (\mathfrak{k}\,d\mathfrak{s}) = k^k dx^i(\mathfrak{e}_k\mathfrak{e}_i),$$

also

$$\frac{\partial U}{\partial x^i} = k^k(\mathfrak{e}_i\mathfrak{e}_k) = k_i.$$

Die Grundgleichung der Mechanik heißt dann

$$m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = m\left(\frac{dv^i}{dt}\mathfrak{e}_i + v^i\frac{d\mathfrak{e}_i}{dt}\right) = k^i\mathfrak{e}_i = \mathfrak{k},$$

also nach Multiplikation mit $\mathfrak{e}_k$

$$m\left\{\frac{dv^i}{dt}(\mathfrak{e}_i\mathfrak{e}_k) + v^i\left(\mathfrak{e}_k\frac{d\mathfrak{e}_i}{dt}\right)\right\} = \frac{dU}{dx^k},$$

während die kinetische Energie T dargestellt wird durch

(1)
$$2T = m\,v^i v^k(\mathfrak{e}_i\mathfrak{e}_k) = v^i p_i.$$

Diese Schreibweise gestattet die Gleichungen sofort in einem fließenden d. h. einem willkürlich zeitlich veränderlichen Koordinatensystem zu schreiben. In einem solchen gilt:

(2)
$$\begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{e}_l}{dt} = \dfrac{\partial \mathfrak{e}_l}{\partial t} + v^k\dfrac{\partial \mathfrak{e}_l}{\partial x^k}, \qquad v^i = u^i + \dfrac{dx^i}{dt} \\ \mathfrak{e}_h\dfrac{\partial u^h}{\partial x^l} = \dfrac{\partial \mathfrak{e}_l}{\partial t}, \end{cases}$$

Dabei bedeutet $\mathfrak{u}$ die Strömungsgeschwindigkeit des Koordinatensystems, $\frac{d\mathfrak{e}_l}{dt}$ bzw. $\frac{\partial \mathfrak{e}_l}{\partial t}$ die Änderung der Vektoren $\mathfrak{e}_l$ mit der Zeit im Massenpunkt bzw. an einem festen Ort,
so daß für $x^i = \text{const}$ wird

$$\mathfrak{e}_k\frac{\partial v^k}{\partial x^l} = \frac{\partial \mathfrak{e}_l}{\partial t}.$$

Daher wird[1])

$$\frac{\partial T}{\partial x^l}\bigg|_{\dot{x}^r} = m\left\{v^i v^h\left(\mathfrak{e}_i \frac{\partial \mathfrak{e}_k}{\partial x^l}\right) + v^i(\mathfrak{e}_i\,\mathfrak{e}_k)\frac{\partial v^k}{\partial x^l}\right\} = m v^i\left(\mathfrak{e}_i \frac{d\mathfrak{e}_l}{dt}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^l}\bigg|_{x^r} = m v^i(\mathfrak{e}_i\mathfrak{e}_l) = m v_l = p_l$$

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^l} = m\left\{\frac{dv^i}{dt}(\mathfrak{e}_i\mathfrak{e}_l) + v^i\left(\mathfrak{e}_i\frac{d\mathfrak{e}_l}{dt} + \mathfrak{e}_l\frac{d\mathfrak{e}_i}{dt}\right)\right\}.$$

Die Grundgleichung der Mechanik schreibt sich daher in einem willkürlichen, eventuell auch zeitlich veränderlichen Koordinatensystem

$$(3)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^l}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^l} = \frac{\partial U}{\partial x^l},$$

oder bei Einführung des „kinetischen Potentials" (*Lagrange*sche Funktion) $L = T + U$

$$(4)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^l}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^l}\left(= \frac{dp_l}{dt}\right)\quad (\textit{Lagrange}\text{sche Gleichungen}).$$

Nun gilt[2]) aber

$$\frac{\partial T}{\partial x^l}\bigg|_{\dot{x}^r} = \frac{\partial T}{\partial x^l}\bigg|_{v^r} + p_i\frac{\partial u^i}{\partial x^l};\quad \frac{\partial T}{\partial x^l}\bigg|_{v^r} = -\frac{\partial T}{\partial x^l}\bigg|_{v_r};\quad \frac{\partial U}{\partial x^l}\bigg|_{v^r} = \frac{\partial U}{\partial x^l}\bigg|_{v_r},$$

also geht die *Lagrange*sche Form über bei Einführung von

$$H = T - U - p_i u^i = p_i\dot{x}^i - (T + U)\,{}^{3})$$

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{dp_l}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x^l}\bigg|_{p_r} \\ \text{und} \\ \dfrac{dx^l}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_l}\bigg|_{x^r} \end{cases}\quad (\textit{Hamilton}\text{sche } \textit{kanonische} \text{ Gleichungen}),$$

---

[1]) Die Schreibweise bedeutet, daß hier T als Funktion der x^i und $\dot{x}^i$ (also nicht etwa der v_i) betrachtet werden soll.

[2])
$$\frac{\partial T}{\partial x^l}\bigg|_{v^r} = v^i v^h\left(\mathfrak{e}_i\frac{\partial \mathfrak{e}_k}{\partial x^l}\right) = m v_i v^h\left(\mathfrak{e}^i\frac{\partial \mathfrak{e}_k}{\partial x^l}\right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial x^l}\bigg|_{v_r} = m\, v_i v_k\left(\mathfrak{e}^k\frac{\partial \mathfrak{e}^i}{\partial x^l}\right) = m\, v_i v^h\left(\mathfrak{e}_k\frac{\partial \mathfrak{e}^i}{\partial x}\right)$$

wobei wegen $(\mathfrak{e}^i\mathfrak{e}_k) = 0$ für $i \neq h$ bzw. $= 1$ für $i = h$ gilt

$$\mathfrak{e}^i\,\frac{\partial \mathfrak{e}_k}{\partial x^l} = -\,\mathfrak{e}_k\,\frac{\partial \mathfrak{e}^i}{\partial x^l}.$$

[3]) Für $u^i = 0$ ist $H = T - U = T + W$ die Energie und $\dfrac{dH}{dt} = 0$.

wobei die letzte Gleichung folgt aus

$$2\,T = p_i v^i, \qquad v^i - u^i = \frac{d x^i}{d t} = \frac{\partial T}{\partial p_i}\bigg|_{x^r} - u^i = \frac{\partial (T - U - u^i p_i)}{\partial p_i}\bigg|_{x^r}.$$

Die Größen x^i und p_i $\left(\text{nicht } p^i = m\frac{d x^i}{d t}\right)$ heißen *generalisierte* Lagen- und Impulskoordinaten. Meist findet man statt x^i die Schreibweise q_i.

Setzt man $S = \int_{t_0}^{t} L\,d t$ (*Wirkungsfunktion*), wo das Integral längs einer Bahn erstreckt und S als eine Funktion der x^i, der Zeit t und von Konstanten betrachtet sei, so wird:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\,\delta x^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\,\delta \dot{x}^i\right) d t + \frac{\partial S}{\partial t}\,\delta t$$

$$= \int_{t_0}^{t}\left(\left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{d t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)\right)\delta x^i + \frac{d}{d t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\,\delta x^i\right)\right) d t + \frac{\partial S}{\partial t}\,\delta t$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\,\delta x^i + \frac{\partial S}{\partial t}\,\delta t = p_i\,\delta x^i + \frac{\partial S}{\partial t}\,\delta t,$$

also:

$$\frac{\partial S}{\partial x^i}\bigg|_t = p_i,$$

ferner

$$\frac{dS}{d t} = L = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x^i}\,\frac{d x^i}{d t} = \frac{\partial S}{\partial t} + p_i(v^i - u^i)$$

$$= \frac{\partial S}{\partial t} + 2\,T - p_i u^i = \frac{\partial S}{\partial t} + H + L,$$

also:

(6) $$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, x^i, \frac{\partial S}{\partial x^i}\right) = 0$$ (*Hamilton*-*Jacobi*sche Gleichung).

Es sei aus dieser Differentialgleichung S bestimmt als Funktion von t, x^i und Integrationskonstanten α_i, unter denen sich, falls H von t unabhängig ist, die Energiekonstante $h = -\frac{\partial S}{\partial t}$ befindet. Setzt man $A = S + h(t - t_0)$ und $\frac{\partial A}{\partial \alpha_i} = \beta_i$, wo die β_i neue Konstanten sein sollen. und nimmt man diese so, daß die Anfangsbedingungen erfüllt sind, so liefert die letzte Gleichung die Bahnkurve in der Form:

$$x^i = f_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots).$$

Zentralkraft.

Ist
$$\mathfrak{k} \parallel \mathfrak{r}, \quad \text{also} \quad [\mathfrak{k}\,\mathfrak{r}] = 0 \quad (\textit{Zentralkraft}),$$
so ist
$$\frac{d}{dt}[\mathfrak{r}\,\mathfrak{v}] = 0 \quad (\textit{Flächensatz}).$$

Der Spezialfall der *Planetenbewegung* läßt sich vektoriell folgendermaßen behandeln:
$$\ddot{\mathfrak{r}} = -C\frac{\mathfrak{r}}{r^3} \quad \text{(Newtonsches Attraktionsgesetz).}$$
Aus dem Flächensatz folgt:
$$[\mathfrak{r}\,\dot{\mathfrak{r}}] = \mathfrak{f} \quad (\mathfrak{f} \text{ ein konstanter Vektor}).$$
Wir finden weiter:
$$(\mathfrak{r}\,\mathfrak{f}) = 0,$$
d. h. Bewegung in einer Ebene.
$$[\ddot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{f}] = [\ddot{\mathfrak{r}}[\mathfrak{r}\,\dot{\mathfrak{r}}]] = -\frac{C}{r^3}[\mathfrak{r}[\mathfrak{r}\,\dot{\mathfrak{r}}]]$$
$$= -\frac{C}{r^3}(\mathfrak{r}(\mathfrak{r}\,\dot{\mathfrak{r}}) - \dot{\mathfrak{r}}\,r^2) = -\frac{C}{r^3}\left(\frac{\mathfrak{r}}{2}\frac{d r^2}{dt} - \dot{\mathfrak{r}}\,r^2\right)$$
$$= C\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathfrak{r}}{r}\right) = \frac{d}{dt}[\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{f}].$$
Also:
$$[\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{f}] = C\frac{\mathfrak{r}}{r} + \mathfrak{a}.$$
$\mathfrak{a}$ spielt die Rolle einer Integrationskonstanten. Es ist:
$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{f}) = 0$$
$$(\mathfrak{r}[\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{f}]) = C\,r + (\mathfrak{a}\,\mathfrak{r}) = (\mathfrak{f}[\mathfrak{r}\,\dot{\mathfrak{r}}]) = k^2,$$
also:
$$r = \frac{k^2}{C + a\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{r})}.$$
Das ist die Gleichung eines Kegelschnittes. Der Vektor $\mathfrak{a}$ gibt uns die Richtung der großen Achse, er weist vom Brennpunkt zum Perihel.

Für den Geschwindigkeitsvektor ergibt sich folgende interessante Darstellung:
$$[\mathfrak{f}[\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{f}]] = \dot{\mathfrak{r}}\,k^2 - \mathfrak{f}(\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{f}) = \dot{\mathfrak{r}}\,k^2 = [\mathfrak{f}\,\mathfrak{r}]\frac{C}{r} + [\mathfrak{f}\,\mathfrak{a}],$$
also:
$$\dot{\mathfrak{r}} = \frac{[\mathfrak{f}\,\mathfrak{a}]}{k^2} + \frac{C}{k^2}\frac{[\mathfrak{f}\,\mathfrak{r}]}{r}.$$

Die Geschwindigkeit läßt sich also in jedem Punkte der Bahn zusammensetzen aus zwei ihrem Betrage nach konstanten Vektoren;

der eine steht immer senkrecht zur großen Achse, der andere senkrecht zum Radiusvektor.

Bezüglich einer koordinatenmäßigen Verfolgung der Planetenbewegung vgl. S. 97.

Zwangskräfte.

Wirken auf einen Massenpunkt *Zwangskräfte* $\mathfrak{z}_a$ (Komponenten z_{ai}), d. h. ist seine Bewegung durch Bedingungsgleichungen $f_a(x^1, x^2, x^3) = 0$ beschränkt[1]), so gilt:

(7) $$m\,\mathfrak{b} = \mathfrak{k} + \sum_a \mathfrak{z}_a .$$

Die Arbeit der Zwangskräfte verschwindet. $\sum_a (\mathfrak{z}_a d\mathfrak{r}) = 0$, d. h. $\mathfrak{z}_a$ steht senkrecht auf der Fläche $f_a(x^1, x^2, x^3) = 0$, also

$$z_{ai} = \lambda_a \cdot \frac{\partial f_a}{\partial x^i}(x^1, x^2, x^3).$$

Die Bewegungsgleichung lautet daher:

(8) $$(k_i - m b_i) + \sum_a \lambda_a \frac{\partial f_a}{\partial x^i}(x^1, x^2, x^3) = 0 \quad (3 \text{ Gleichungen}),$$

und

$$f_a(x^1, x^2, x^3) = 0 \quad (\alpha \text{ Gleichungen}).$$

Die λ_a sind hieraus zu eliminieren.

C. Systeme von Massenpunkten.

1. Allgemeines.

Das System bestehe aus N Massenpunkten.

Die Massen m_a seien Kräften $\mathfrak{k}_a$ unterworfen. Außerdem mögen sie aufeinander Zentralkräfte $\mathfrak{k}_{a\beta}$ ausüben.

Dann gilt für jeden Massenpunkt:

(1) $$m\,\mathfrak{b}_a = \mathfrak{k}_a + \sum_\beta \mathfrak{k}_{a\beta} \qquad \alpha \neq \beta .$$

Hierbei ist

$$\mathfrak{k}_{\beta a} = - \mathfrak{k}_{a\beta} \quad (\textit{actio-reactio}).$$

Die Arbeit der Kräfte wird

(2) $$\begin{aligned} dA &= \sum_a (\mathfrak{k}_a\, d\mathfrak{r}_a) + \sum_a \sum_\beta (\mathfrak{k}_{\beta a}\, d\mathfrak{r}_a) \\ &= \sum_a (\mathfrak{k}_a\, d\mathfrak{r}_a) + \tfrac{1}{2} \sum_a \sum_\beta (\mathfrak{k}_{\beta a} (d\mathfrak{r}_a - d\mathfrak{r}_\beta)). \end{aligned}$$

---

[1]) Bedingungsgleichungen, die in der Form $f_a(x^1, x^2, x^3) = 0$ gegeben sind, heißen *holonom*. Sind sie durch eine nicht integrable totale Differentialgleichung $L\,dx^1 + M\,dx^2 + N\,dx^3 = 0$ gegeben, so heißen sie *nicht holonom*.

Sind die Kräfte $\mathfrak{k}_\alpha$ bzw. $\mathfrak{k}_{\alpha\beta}$ teilweise Zwangskräfte, d. h. durch Bedingungsgleichungen ersetzbar, so verschwindet ihr Anteil in dA.

Die Bedingungsgleichungen für die $\mathfrak{z}_{\alpha\beta}$ haben die Form:

$$f(x_\alpha^1, x_\alpha^2, x_\alpha^3, x_\beta^1, x_\beta^2, x_\beta^3) = 0,$$

$$[\mathfrak{z}_{\alpha\beta}, d(\mathfrak{r}_\alpha - \mathfrak{r}_\beta)] = 0,$$

$$\left((z_{\alpha\beta})_i = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha^i} - \frac{\partial f}{\partial x_\beta^i}\right) \quad \text{im } affinen \text{ Koordinatensystem}\right),$$

(3) $$[\mathfrak{z}_{\alpha\beta}\, d\mathfrak{r}_\alpha] = [\mathfrak{z}_{\alpha\beta}\, d\mathfrak{r}_\beta].$$

2. Formale Zurückführung auf die Dynamik eines Massenpunktes.

Die Dynamik eines Systems von N Massenpunkten im 3-dimensionalen Raum kann formal auf die eines einzelnen im $3N$-dimensionalen zurückgeführt werden.

Die *Lagrange*schen Gleichungen lassen sich dann schreiben:

(1) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial v^i}\right) - \frac{\partial \overline{T}}{\partial x^i} = \frac{\partial \overline{U}}{\partial x^i}, \quad \text{wo} \quad \overline{T} = \sum_n T_n, \quad \overline{U} = \sum_n U_n.$$

Dabei ist es durchaus nicht notwendig, daß die x^i bzw. p_i für alle Massen auf das gleiche Koordinatensystem bezogen werden. Man kann z. B. so vorgehen, daß man zunächst einen Massenpunkt auszeichnet und auf ein festes oder bewegtes System bezieht, sodann den zweiten auf ein solches, welches relativ zum ersten ruht, den dritten auf eines, in dem die beiden ersten ruhen, also auf ein fließendes usw. Für alle Massenpunkte gelten dann unverändert die *Lagrange*schen oder *Hamilton*schen Gleichungen.

Ebenso wie die 3 auf einen Massenpunkt sich beziehenden *Lagrange*schen Gleichungen in ihrer Form ungeändert bleiben, wenn man zu andern Koordinaten übergeht, so bleibt das System der $3n$ Gleichungen in seiner Form erhalten, wenn wir an Stelle der x^i neue $x^{i\prime}$ einführen, die beliebige voneinander unabhängige Funktionen der x^i sind:

$$x^{i\prime} = f_i(x^1, x^2, x^3 \ldots x^{3n}),$$

Die $3n$ $x^{i\prime}$ sind dann als Parameter des gesamten Systems aufzufassen.

Bestehen zwischen den x^i α unabhängige Bedingungsgleichungen, so kann man α Koordinaten eliminieren. Es empfiehlt sich dann durch eine Transformation zu neuen Koordinaten x'^i überzugehen, derart, daß die α Bedingungsgleichungen durch α Gleichungen der Form $x'^i = \text{const}$ ersetzt werden.

Die Zahl $Z = 3N - \alpha$, d. h. die Zahl der zur Beschreibung der Anordnung aller Teile erforderlichen Variabeln heißt die *„Zahl der Freiheitsgrade“* des Systems. Für ein System von 3 und mehr starr verbundenen Massenpunkten ist $Z = 6$.

3. Grundlagen der statistischen Mechanik.

Die $6N$-Größen x^i und p_i definieren den Zustand aus den N Punkten bestehenden Systems eindeutig. Benutzt man diese Größen als *Cartesis*che Koordinaten, so veranschaulichen sie den Lage- und Bewegungszustand des Systems durch einen Punkt in einem $6N$-dimensionalen Raum (*Phasenraum*).

Die zeitliche Änderung dieses Zustandes wird durch eine Kurve dargestellt. Für diese gilt:

$$(1) \qquad \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial p_i}; \qquad \frac{\partial p_i}{dt} = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial x^i},$$

wo $\overline{H} = \overline{T} - \overline{U}$ eine skalare Funktion von x^i und p_i ist. Diese Kurve geht durch jeden Punkt des Raumes in einer bestimmten Richtung, kann sich also nicht selbst schneiden.

In der *statistischen Mechanik* betrachtet man eine große Zahl solcher Systeme, die durch die gleiche Funktion $\overline{H}$ bestimmt werden. Jedes System wird dann durch einen Punkt im Phasenraum dargestellt, deren Gesamtheit sich über den Phasenraum verteilt.

Faßt man eine Anzahl derselben ins Auge, die ein gewisses Volumen des Phasenraumes erfüllen, so erfüllen sie nach einiger Zeit ein Volumen derselben Größe (*Liouvillescher Satz*). Man kann dann die Phasenpunkte als ein strömendes Kontinuum auffassen, für welches $\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$ ist. Ist die Verteilungsdichte ϱ der Phasenpunkte derartig, daß die Strömungsrichtung überall senkrecht auf dem Gradienten der Funktion H steht, so wird $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$, d. h. ϱ ist dann nur eine Funktion von $H(p, q)$. Man spricht dann von *statistischem Gleichgewicht*.

Für ein abgeschlossenes System ist die Kurve im Phasenraum durch die Energiegleichung $E = \text{const}$ auf eine Hyperfläche beschränkt. Zu der räumlichen Dichte $\varrho = \text{const}$ auf dieser Fläche gehört die „Flächendichte“

$$(2) \qquad \sigma = \frac{\text{const}}{\sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial x^1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial E}{\partial p_1}\right)^2 + \ldots}}$$

Die *„Ergodenhypothese“* behauptet, daß der Phasenpunkt durch jeden Punkt dieser Hyperfläche hindurchgeht oder ihm wenigstens beliebig nahekommt. Gilt diese Hypothese, so verlangt der *Liouville*sche Satz, daß die Phasenpunkte in langen Zeiträumen im Durchschnitt sich

in gleichgroßen Flächenteilen proportional den Zeiten Const$\cdot\sigma$ aufhalten. Die exakte Gültigkeit der Ergodenhypothese ist zweifelhaft.

Für ein nicht abgeschlossenes System fällt die Beschränkung auf die Hyperfläche $E = \text{const}$ fort. Nach *Gibbs* ist dann $\varrho = f(E)$ speziell gleich $\varrho = N e^{\frac{F-E}{kT}}$, wo N die Zahl der betrachteten Systeme, T die gemeinsame Temperatur, k die *Boltzmann*sche Konstante und F die freie Energie bedeutet (vgl. S. 248 ff.).

Es ist $\int \varrho \cdot d\omega = N$, wo $d\omega$ ein Differential des Phasenraumes ist, also

$$e^{-\frac{F}{kT}} = \int e^{-\frac{E}{kT}}\, d\omega; \quad F = -kT \ln \int e^{-\frac{E}{kT}}\, d\omega = -kT \ln Z.$$

Das Integral $Z = \int e^{-\frac{E}{kT}}\, d\omega$ heißt „*Zustandsintegral*".

Zerlegt man den Phasenraum in einzelne Schichten zwischen E und $E + dE$ vom Volumen $d\omega = V(E)\, dE$, so wird:

$$Z = \int e^{-\frac{E}{kT}}\, V(E)\, dE = \int J dE. \tag{3}$$

Der Integrand hat ein stark hervortretendes Maximum für einen Wert $E = E_0$. Hier ist

$$\frac{\partial \ln J_0}{\partial E} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \ln J_0}{\partial E^2} = -h, \qquad h > 0.$$

Da das Integral $\int J dE$ nur in der Umgebung des Maximums einen nennenswerten Beitrag liefert, kann man h konstant setzen, und es wird daher mit großer Annäherung:

$$F = E_0 - kT\left(\ln V_0 + \ln \sqrt{\frac{2\pi}{h}}\right). \tag{4}$$

$\ln \sqrt{\frac{2\pi}{h}}$ kann man vernachlässigen gegen $\ln V_0$. Daraus folgt

$$k \ln V_0 = \frac{E_0 - F_0}{T} = S_0 = \text{Entropie}. \tag{5}$$

Da V_0 die statistische Wahrscheinlichkeit für den Zustand des Systems angibt (vgl. S. 269), welches bei der Temperatur T die Energie E_0 hat, ist $S = k \ln V_0$ die *Boltzmann*sche Beziehung zwischen Entropie und Wahrscheinlichkeit.

4. Gleichgewichtslagen und Schwingungen.

Sind für ein bestimmtes Wertesystem x^i alle $\frac{\partial U}{\partial x^i} = 0$, so besteht Gleichgewicht und man kann U in der Nachbarschaft dieser Stelle darstellen in der Form:

$$(1)\quad \begin{aligned} U = U_0 + \sum_i \frac{(x^i - x_0^i)^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^{i2}} \\ + \sum_i \sum_k (x^i - x_0^i)(x^k - x_0^k) \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^i \partial x^k} + \dots, \end{aligned}$$

d. h. $U - U_0 = x^i x^k \frac{A_{ik}}{2}$ (unter Fortlassung der $\sum$-Zeichen), wenn man x_0^i als neuen Nullpunkt wählt. Dann gilt (in Cartesischen Koordinaten):

$$(2)\quad m_i \frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x^i} = x^k A_{ik}.$$

Setzt man hierin

$$x^i = a^i e^{\frac{\omega t}{\sqrt{m_i}}},$$

so wird

$$x^i \omega^2 = x^k A_{ik},$$

d. h. man erhält ein System von 3 N homogenen linearen Gleichungen (vgl. S. 3).

Durch Nullsetzen der Determinante erhält man eine Gleichung 3 N-ten Grades für ω^2.

Transformiert man die x^i wie in S. 5 in die neuen Koordinaten x^i, so heißen diese „Normalkoordinaten".

Stabil ist der durch $x^i = x_0^i$ gegebene Gleichgewichtszustand bzw. der durch $x^i = a^i e^{\frac{\omega t}{\sqrt{m_i}}}$ gegebene Schwingungszustand nur, wenn die Gleichung für ω^2 nur negativ reelle Wurzeln hat.

D. Starrer Körper.

Ein Massenpunktsystem bestehend aus starr miteinander (durch Zwangskräfte) verbundene Massen m_a heißt ein *starrer* Körper.

Die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_a$ seiner Punkte sind dann durch zwei freie Vektoren[1]) $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{u}$ darstellbar:

$$(1)\quad \mathfrak{v}_a = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}_a] \qquad (v_a^i = v_0^i + u_k^i x_a^k; \quad u^{ik} = -u^{ki}).$$

$\mathfrak{r}_a$ ist der Ortsvektor von einem mit dem Körper starr verbundenen Nullpunkt aus.

$\mathfrak{v}_0$ ist die Geschwindigkeit des Punktes $\mathfrak{r} = 0$.

$\mathfrak{u}$ ist die Drehgeschwindigkeit um die durch $\mathfrak{r} = 0$ gehende Achse $\parallel \mathfrak{u}$.

---

1) Es sollen *nur affine* (d. h. gradlinig äquidistante) Koordinaten in Frage kommen, da nur in solchen die Komponenten der freien Vektoren vom Ort unabhängig sind.

Verschiebt man das Bezugssystem im Körper um die Strecke $\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} - \mathfrak{a}$), so wird $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{a}] + [\mathfrak{u}, \mathfrak{r} - \mathfrak{a}] = \mathfrak{v}_0' + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}']$, d. h. die Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ ist unabhängig von der Wahl des Bezugssystems.

Wählt man speziell $\mathfrak{a} = \frac{[\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}]}{u^2}$, so wird

$$\mathfrak{v}_0' = \frac{\mathfrak{u}\,(\mathfrak{u}\,\mathfrak{v})}{u^2}, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{v}_0' \parallel \mathfrak{u}.$$

Die Bewegung ist also als reine *Schraubung* darstellbar. Die Achse durch den neuen Nullpunkt ($\mathfrak{r}' = 0$) heißt *instantane Drehachse.*

Weitere wichtige Vektoren sind:

(2) $\mathfrak{p} = \sum_a m_a\,\mathfrak{v}_a$ der *Gesamtimpuls* $\qquad p^i = \sum m\,v^i$

(3) $\mathfrak{q} = \sum_a m_a [\mathfrak{r}_a \mathfrak{v}_a]$ der gesamte *Drehimpuls* $\qquad q^{ik} = \sum m\,(x^i v^k - x^k v^i)$

$$q^{ik} = -\,q^{ki}.$$

Die kinetische Energie $T = \sum \frac{m}{2} v^2$ ist dann darstellbar durch:

$$2\,T = (\mathfrak{v}_0\,\mathfrak{p}) + (\mathfrak{u}\,\mathfrak{q}) = (v^i p_i + u^{ik} q_{ik}). \tag{4}$$

Schwerpunkt heißt der Punkt, für den als Nullpunkt ($\mathfrak{r} = 0$) $\sum m\,\mathfrak{r} = 0$ wird.

(5) $\qquad M = \sum_a m_a$ heißt *Gesamtmasse,*

(6) $\qquad J_u = \sum_a m \frac{[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]^2}{u^2}$ heißt das *Trägheitsmoment* bezogen auf die Drehachse $\mathfrak{u}$ durch $\mathfrak{r} = 0$.

Es ist dann:

$$T = \frac{M v^2}{2} + \frac{J_u u^2}{2}. \tag{7}$$

Die Kräfte auf starre Körper sind (in ihrer Wirkung) darzustellen durch zwei Vektoren:

(8) 1. die *Gesamtkraft* $\mathfrak{k} = \sum_a \mathfrak{k}_a \qquad k = \sum k^i$

(9) 2. das *Drehmoment* $\mathfrak{l} = \sum_a [\mathfrak{r}_a \mathfrak{k}_a] \qquad l^{ik} = \sum (x^i k^k - x^k k^i)$

$$l^{ik} = -\,l^{ki}.$$

Die *Bewegungsgleichungen* lauten dann:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{p}}{dt} &= \mathfrak{k}, & \frac{dp^i}{dt} &= k^i, \\ \frac{d\mathfrak{q}}{dt} &= \mathfrak{l} - [\mathfrak{v}_0\,\mathfrak{p}], & \frac{dq^{ik}}{dt} &= l^{ik} - v_0^i p^k + v_0^k p^i. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Wir wählen im weiteren den Schwerpunkt zum Nullpunkt unseres Systems, so daß $\sum m v = 0$ ist. Dann vereinfachen sich die Gleichungen,

wegen $[\mathfrak{v}_0 \mathfrak{p}] = 0$ zu der Form:

(11) $$\frac{d\mathfrak{p}}{dt} = \mathfrak{k}; \qquad \frac{d\mathfrak{q}}{dt} = \mathfrak{l}.$$

Der kräftefreie Kreisel.

Fehlen alle äußeren Kräfte, bzw. heben diese sich vollständig auf, wie z. B. die Gravitationskräfte bei einer Unterstützung des Körpers im Schwerpunkt, so vereinfachen sich die Beziehungen wesentlich. Es gilt speziell:

(12) $$\frac{d\mathfrak{q}}{dt} = 0.$$

Die Relation (3):

$$\mathfrak{q} = \sum m[\mathfrak{r}[\mathfrak{u}\mathfrak{r}]]$$

läßt sich durch einen symmetrischen Tensor $\mathfrak{T}$ darstellen:

(13) $$\mathfrak{q} = \mathfrak{T}\mathfrak{u}.$$

$\mathfrak{T}$ ist natürlich, ebenso wie $\mathfrak{u}$, zeitabhängig. Der Energiesatz fordert:

(14) $$(\mathfrak{u}\,\mathfrak{q}) = (\mathfrak{u}\,\mathfrak{T}\,\mathfrak{u}) = \text{const} = C_1,$$

andererseits fordert (12):

(15) $$\mathfrak{q}^2 = (\mathfrak{T}\mathfrak{u}\,\mathfrak{T}\mathfrak{u}) = (\mathfrak{u}\,\mathfrak{T}^2\mathfrak{u}) = C_2.$$

Wir führen nunmehr durch den orthogonalen Tensor $\mathfrak{D}$ ein neues Bezugssystem ein durch:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{D}\bar{\mathfrak{r}}$$

und lassen $\mathfrak{D}$ derartig von der Zeit abhängen, daß

(16) $$\frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{dt} = 0$$

wird. (Transformation auf ein *körperfestes Bezugssystem.*) In diesem lautet (13):

$$\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{T}}\bar{\mathfrak{u}},$$

wo nunmehr $\bar{\mathfrak{T}}$, da es nur von den Massen und den $\bar{\mathfrak{r}}$ abhängt, *zeitunabhängig* wird. Das Tensorellipsoid $(\bar{\mathfrak{r}}\bar{\mathfrak{T}}\bar{\mathfrak{r}}) = 1$ heißt das *Trägheitsellipsoid* des Körpers.

Die transformierten Gleichungen (14) und (15):

$$(\bar{\mathfrak{u}}\bar{\mathfrak{T}}\bar{\mathfrak{u}}) = C_1$$

und

$$(\bar{\mathfrak{u}}\bar{\mathfrak{T}}^2\bar{\mathfrak{u}}) = C_2$$

liefern folgende anschauliche Darstellung für die zeitliche Änderung von $\bar{\mathfrak{u}}$:

Deuten wir $\bar{\mathfrak{u}}$ als Ortsvektor einer Bahnkurve, so ergibt sich diese als Schnittkurve der beiden Tensorellipsoide von $\frac{\bar{\mathfrak{T}}}{C_1}$ und $\frac{\bar{\mathfrak{T}}^2}{C_2}$ (*Polhodiekurve*).

Aus

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathfrak{D}\frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{dt} + \mathfrak{D}'\bar{\mathfrak{r}} = [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}] = \mathfrak{D}\,[\bar{\mathfrak{u}}\,\bar{\mathfrak{r}}]$$

folgt wegen (16) für einen beliebigen Vektor $\mathfrak{a}$:

$$\frac{d\mathfrak{a}}{dt} = \mathfrak{D}\left(\frac{d\bar{\mathfrak{a}}}{dt} + [\bar{\mathfrak{u}}\,\bar{\mathfrak{a}}]\right) \quad \text{(vgl. S. 167).}$$

also wegen (12):

$$(17) \qquad \frac{d\bar{\mathfrak{q}}}{dt} + [\bar{\mathfrak{u}}\,\bar{\mathfrak{q}}] = 0 \qquad \textit{(Eulersche Gleichung)}$$

(bzw. $= \bar{\mathfrak{l}}$ bei Vorhandensein eines äußeren Drehmomentes (11)).

Aus (14) folgt ferner, daß der Vektor $\mathfrak{u}$ als Ortsvektor gedeutet immer auf eine feste Ebene senkrecht zu $\mathfrak{q}$ hinweist. Diese Ebene ist zugleich Tangentialebene an das Ellipsoid $\frac{\mathfrak{T}}{C_1}$, d. h. das Trägheitsellipsoid rollt bei festem Zentrum auf einer festen Ebene. Die Bahn des Berührungspunktes definiert nach Größe und Richtung die Zeitabhängigkeit des Vektors $\mathfrak{u}$ („*Herpolhodiekurve*").

Der symmetrische Kreisel.

Im Falle einer *Rotationssymmetrie* des Körpers ist die Benutzung eines Tensors unnötig. Hier genügt an Stelle von (13) der Ansatz:

$$(1) \qquad \mathfrak{q} = \alpha\mathfrak{u} + \beta\mathfrak{f}(\mathfrak{u}\mathfrak{f}),$$

wo $\mathfrak{f}$ ein Einheitsvektor in Richtung der Figurenachse ist und α und β zwei Konstanten sind, die die Massenverteilung bzw. die Hauptträgheitsmomente berücksichtigen. Nehmen wir an, daß alle äußeren Kräfte zusammengefaßt werden können in eine Kraft $\mathfrak{k}$, die in einem Punkt der Figurenachse im Abstand 1 vom Drehpunkt angreift, so gelten folgende Gleichungen:

$$(2) \qquad \frac{d\mathfrak{q}}{dt} = [\mathfrak{f}\mathfrak{k}], \qquad \frac{d\mathfrak{f}}{dt} = [\mathfrak{u}\mathfrak{f}] \qquad (\mathfrak{f}^2 = 1).$$

Diese Gleichungen genügen zur Berechnung der unbekannten Vektoren $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{f}$ bei gegebenen Anfangsbedingungen und gegebenem $\mathfrak{k}$.

Ist $\mathfrak{k}$ konstant und gehen wir aus von einem Zustand, wo $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{u}$ und daher auch $\mathfrak{q}$ konplanar sind, und besteht die Relation

$$(3) \qquad \mathfrak{k} = \tau\mathfrak{q} + \alpha\tau^2\mathfrak{f},$$

wo τ ein beliebiger Faktor ist, so folgt, daß das System dieser Vektoren in sich unverändert mit der Geschwindigkeit $\omega = \frac{h}{\alpha\tau}$ um $\mathfrak{k}$ rotiert. („*Reguläre Präzession*".)

Für die allgemeine Lösung der Gleichungen geht man üblicherweise in ein geeignetes Koordinatensystem über. Die weitere Rechnung führt dann auf elliptische Funktionen.

Beschränkt man sich auf die Untersuchung solcher Bewegungen, die der regulären Präzession nahe benachbart sind, so kann man wie folgt verfahren:

Man transformiere zunächst auf ein mit der Geschwindigkeit ω um $\mathfrak{k}$ rotierendes Bezugssystem. In diesem sind die bei der regulären Präzession gefundenen $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{q}$ konstant $= \mathfrak{f}_0$, $\mathfrak{u}_0$ und $\mathfrak{q}_0$. Eine benachbarte Bewegungsform wird dann gegeben durch:

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_0 + \delta\mathfrak{f}, \qquad \mathfrak{u} = \mathfrak{u}_0 + \delta\mathfrak{u}, \qquad \mathfrak{q} = \mathfrak{q}_0 + \delta\mathfrak{q},$$

wo wir die $\delta\mathfrak{f}$, $\delta\mathfrak{u}$ und $\delta\mathfrak{q}$ als so kleine Größen auffassen, daß ihre Produkte vernachlässigt werden können. Zu ihrer Bestimmung findet man dann leicht die Gleichungen:

$$(4) \qquad \frac{d}{dt}\delta\mathfrak{f} = \frac{h}{\alpha\omega}\left[\mathfrak{f}_0\left(\delta\mathfrak{f} + \frac{\omega}{h}\gamma\mathfrak{q}\right)\right],$$

$$(5) \qquad \frac{d}{dt}\delta\mathfrak{q} = -\left[\mathfrak{k}\left(\delta\mathfrak{f} + \frac{\omega}{h}\delta\mathfrak{q}\right)\right].$$

Diese linearen Gleichungen sind leicht zu lösen, auch in Vektorform (vgl. S. 170). Die Bewegung ergibt sich wieder als Präzessionsbewegung z. B. von $\mathfrak{f}$ um $\mathfrak{f}_0$, die sich der regulären Präzession überlagert. Sie wird als „*Nutation*" bezeichnet.

E. Mechanik der Kontinua.

1. Kinematik.

Die Massen seien kontinuierlich verteilt. Ihre Geschwindigkeiten werden daher durch einen *Feldvektor* $\mathfrak{v}$ bestimmt.

Die *Massendichte* ist ein Skalar ϱ, so daß $\int_V \varrho\, dv = M$ die im Volumen V enthaltene Masse darstellt.

Es ist $\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho\mathfrak{v}) = 0$ (*Kontinuitätsgleichung*).

Hier bedeutet $\frac{\partial}{\partial t}$ die Änderung des Argumentes an einer festen Stelle des Raumes mit der Zeit. Sucht man die betreffende Änderung in einem mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegten Punkt, so verwenden wir das Symbol $\frac{d}{dt}$:

Es ist für einen Skalar α: $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + (\mathfrak{v}\operatorname{grad}\alpha)$,

„ „ Vektor $\mathfrak{a}$: $\frac{d\mathfrak{a}}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{a}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\operatorname{grad})\mathfrak{a}$,

also $\frac{d\varrho}{dt} + \varrho\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0$.

Für *inkompressible* Substanzen ist $\frac{d\varrho}{dt} = 0$ $\left(\text{nicht } \frac{\partial\varrho}{\partial t}\right)$ und $\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0$.

Die Verschiebungen $\delta\mathfrak{s}$ der Punkte eines Kontinuums sind in der Umgebung eines Punktes $\mathfrak{r}_0$ als lineare Funktionen des Ortes $\delta\mathfrak{r} = \mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0$ und eventuell der Zeit zu betrachten.

Wir zerlegen $\delta\mathfrak{s}$ in drei Teile: $\delta\mathfrak{s} = \delta\mathfrak{s}_0 + \frac{1}{2}[\delta\mathfrak{r}\,\mathrm{rot}\,\delta\mathfrak{s}] + \mathfrak{S}(\delta\mathfrak{r})$ mit den Komponenten (in kovarianter Schreibweise):

(1) $$\delta s^i = \delta s_0{}^i + \delta x^k R_k{}^i + \delta x^k S_k{}^i,$$

wobei

(2) $$R_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_i}{\partial x^k} - \frac{\partial s_k}{\partial x_i}\right)$$

und

(3) $$S_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_i}{\partial x^k} + \frac{\partial s_k}{\partial x^i}\right) - s_l \left\{ {ik \atop l} \right\}.$$

$\delta\mathfrak{s}_0$ ist die Verschiebung des Punktes $\mathfrak{r}_0$.

$\frac{1}{2}[\delta\mathfrak{r}\,\mathrm{rot}\,\delta\mathfrak{s}]$ ist eine starre Rotation.

$\mathfrak{S}(\delta\mathfrak{r})$ heißt die *Deformation*. $\mathfrak{S}$ ist ein symmetrischer Tensor (*Deformationstensor*).

$\mathfrak{S}(\delta\mathfrak{r})$ läßt sich weiter zerlegen in

(4) $$\mathfrak{S}(\delta\mathfrak{r}) = \delta\mathfrak{r}\cdot\frac{\mathrm{div}\,\delta\mathfrak{s}}{3} + \mathfrak{S}'(\delta\mathfrak{r}),$$

so daß $\mathrm{div}(\mathfrak{S}'(\delta)) = 0$ ist,
oder in kovarianten Komponenten:

(4') $$S_{ik} = \frac{|S|}{3}\cdot g_{ik} + S'_{ik}, \quad \text{also} \quad |S'| = 0.$$ [1])

Der erste Teil entspricht einer homogenen *Dilatation*.

Der zweite Teil entspricht einer *Scherung*, d. h. Formänderung bei konstantem Volumen.

In analoger Weise läßt sich das Geschwindigkeitsfeld $\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{s}}{dt}$ in der Umgebung des Punktes $\mathfrak{r}_0$ darstellen:

(5) $$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + \tfrac{1}{2}[\delta\mathfrak{r}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{v}] + \mathfrak{V}(\delta\mathfrak{r})$$

und

(6) $$\mathfrak{V}(\delta\mathfrak{r}) = \delta\mathfrak{r}\,\frac{\mathrm{div}\,\mathfrak{v}}{3} + \mathfrak{V}'(\delta\mathfrak{r}).$$

2. Kräfte.

Die in einem Kontinuum wirkenden Kräfte lassen sich einteilen in fernwirkende und nahwirkende.

Erstere werden dargestellt durch Feldvektoren $\mathfrak{f}$ (*Volumenkräfte*), letztere durch Flächenvektoren $\mathfrak{p}$ (*Oberflächenkräfte*).

Die Volumenkräfte (Gravitation u. dgl.) wirken auf alle Elemente eines Raumes.

---

[1]) $|S|$ bedeutet ΣS_i^i, identisch mit $|\mathfrak{S}|$ der symbolischen Vektorschreibweise.

Die Oberflächenkräfte (Oberflächendrucke, äußere Reibung, Atomkräfte u. dgl.) wirken nur auf die Elemente von (wirklichen bzw. gedachten) Flächen.

An freien Oberflächen sind die $\mathfrak{p}$ als gegeben zu betrachten. Legt man eine (gedachte) Schnittfläche durch ein Kontinuum, so lassen sich die inneren nahewirkenden (Atom-)Kräfte ersetzen durch Oberflächenkräfte $\mathfrak{p}$ in der Schnittfläche. Die Größe der $\mathfrak{p}$ ist dabei im allgemeinen abhängig von der Orientierung der Schnittfläche. Diese Abhängigkeit wird dargestellt durch:

(1) $$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}(\mathfrak{n}), \qquad p^i = P^{ik} n_k,$$

wo $\mathfrak{n}$ der Einheitsnormalvektor zur Fläche ist.

$\mathfrak{P}$ heißt der *Spannungstensor*. Er ist symmetrisch.

$\mathfrak{P}(\mathfrak{n})$ läßt sich zerlegen in

(2) $$\mathfrak{P}(\mathfrak{n}) = -\mathfrak{n}\cdot p + \mathfrak{P}'(\mathfrak{n}), \qquad P_{ik} = \frac{|P|}{3} g_{ik} + P'_{ik},$$
$$\text{wo} \quad |P'| = 0,$$

so daß $\operatorname{div}\mathfrak{P}'(\mathfrak{r}) = 0$ ist.

$$p \text{ heißt } \textit{Druck} \left(= -\frac{|P|}{3}\right).$$

Die Gesamtkraft auf ein Volumen V ist

(3) $$\mathfrak{K} = \int \mathfrak{f}\, dv + \int \mathfrak{p}\, df.$$

Das Drehmoment ist

(4) $$\mathfrak{L} = \int dv\, [\mathfrak{f}\mathfrak{r}] + \int df\, [\mathfrak{p}\mathfrak{r}].$$

Die Kraft, die durch die auf die Oberfläche der Volumenelemente wirkenden Oberflächenkräfte ausgeübt wird, ist durch einen Feldvektor $\mathfrak{f}'$ zu ersetzen:

$$\mathfrak{f}' = \operatorname{div}\mathfrak{P}.$$

Die bei einer Verschiebung $\delta\mathfrak{s}$ gegen die Kräfte $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{p}$ geleistete Arbeit δA ist, falls hierbei $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{p}$ constant sind:

$$\delta A = \int dv\, ((\mathfrak{f} + \mathfrak{f}')\, \delta\mathfrak{s})$$

mit

$$\int dv\, \mathfrak{f}'\, \delta\mathfrak{s} = \int df\, (\mathfrak{p}\, \delta\mathfrak{s}).$$

Ist $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{p}$ proportional $\delta\mathfrak{s}$, so tritt der Faktor $\frac{1}{2}$ zur rechten Seite.

3. Elastizitätstheorie.

In elastischen Körpern sind nach dem *Hookeschen Gesetz* die infolge der Verschiebung auftretenden Spannungen lineare Funktionen der Deformation, d. h. die 6 Komponenten von $\mathfrak{P}$ sind lineare Funk-

tionen der 6 Komponenten von $\mathfrak{S}$. Hiernach wären 36 Konstanten zur Darstellung dieser Abhängigkeit erforderlich:

(1) $$P_{ik} = a_{ik}^{lm} S_{lm}.$$

Die *Deformationsarbeit* δA wird dann:

(2) $$\delta A = \tfrac{1}{2}\int (\mathfrak{f}' \delta \mathfrak{f})\, dv = \tfrac{1}{2}\int (\delta \mathfrak{f} \operatorname{div} \mathfrak{P})\, dv$$
$$= -\tfrac{1}{2}\int dv \cdot (\mathfrak{P} \mathfrak{S}) + \tfrac{1}{2}\int df (\mathfrak{p}\, \delta \mathfrak{f}).$$

Sehen wir von dem Oberflächenintegral ab, so ist bei Annahme konservativer Kräfte:

(3) $$\omega = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{P}\mathfrak{S}) = \tfrac{1}{2} P_{ik} S^{ik} = \tfrac{1}{2} a_{ik}^{lm} S^{ik} S_{lm}$$

die in der Volumeneinheit enthaltene *potentielle Energie,* d. h. die Energiedichte. ω ist eine homogene Funktion 2. Grades der Deformation bzw. der Spannungskomponenten.

Aus der Gleichung folgt:

$$P_{ik} = 2 \frac{\partial \omega}{\partial S_{ik}}.$$

Für diese Abhängigkeit sind dann nur 21 Konstanten zur Verfügung, indem jetzt:

$$a_{ik}^{lm} = a_{ki}^{ml} = a_{ki}^{lm} = a_{ik}^{ml}$$

wird.

Für *isotrope Medien* vereinfacht sich die Abhängigkeit. Hier müssen aus Symmetriegründen die Hauptachsenrichtungen der Tensoren $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{S}$ zusammenfallen. Man sieht leicht, daß der allgemeinste Ansatz für die lineare Abhängigkeit beider dann lautet:

(4) $$\frac{\operatorname{div}(\delta \mathfrak{f})}{3} = \alpha \cdot p; \qquad \mathfrak{S}' = \beta \mathfrak{P}';$$
$$S_i^i = \alpha P_i^i; \qquad S'_{ik} = \beta P'_{ik}.$$

Die anschaulich physikalische Bedeutung der Konstanten α und β folgt aus Anwendungen auf spezielle Probleme. Es ist

(5) $$\alpha = \frac{1 - 2\mu}{E} = \frac{\varkappa}{3}, \qquad \beta = \frac{1 + \mu}{E};$$
$$\frac{1}{\alpha} = a_{11} + 2 a_{12}, \qquad \frac{1}{\beta} = a_{11} - a_{12},$$

wo E der Elastizitätskoeffizient,
μ der Querkontraktionskoeffizient,
$\varkappa$ die Kompressibilität ist.

a_{11} und a_{12} sind die Koeffizienten a_{11}^{11} und a_{12}^{12}, die für isotrope Stoffe allein maßgebend sind.

In kovarianter Form ist:

$$|S| = \alpha |P|, \qquad S'_{ik} = \beta P'_{ik}, \qquad (|S| = S^{ik} g_{ik}),$$

$$S_{ik} = \frac{1}{3}|S|g_{ik} + S'_{ik} = \frac{\alpha-\beta}{3}|P|g_{ik} + \beta P_{ik},$$

$$P_{ik} = \frac{1}{3}|P|g_{ik} + P'_{ik} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)|S|g_{ik} + \frac{1}{\beta}S_{ik}.$$

Es folgt daher:

(6) $$S_{ik} = \frac{\mu}{E}|P|g_{ik} + \frac{\mu+1}{E}P_{ik},$$

(6') $$P_{ik} = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}\cdot|S|g_{ik} + \frac{E}{1+\mu}\cdot S_{ik}.$$

Für die Energiedichte folgt:

(7) $$2\omega = S_{ik}P^{ik} = \frac{1}{\beta}(S^2) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)|S|^2 \text{ [1]} \qquad ((S^2) = S_{ik}S^{ik})$$
$$= \beta(P^2) + \frac{\alpha-\beta}{3}|P|^2.$$

a) Statische Elastizitätsprobleme.

1. Gegeben seien die $\delta\mathfrak{f}$, gesucht werden die $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{p}$.

Es ist $\mathfrak{f} = \operatorname{div}\mathfrak{P}' - \operatorname{grad} p = \frac{1}{\beta}\operatorname{div}\mathfrak{S}' - \frac{1}{3\alpha}\operatorname{grad}\operatorname{div}\delta\mathfrak{f}$

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}(\mathfrak{n}) = \frac{\mathfrak{n}}{3\alpha}\cdot\operatorname{div}\delta\mathfrak{f} + \frac{1}{\beta}\mathfrak{S}'(\mathfrak{n}).$$

2. Gegeben seien die $\mathfrak{p}$ und f, gesucht werden die $\delta\mathfrak{f}$.

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta}\right)\cdot\Delta(\operatorname{div}\delta\mathfrak{f}) = -\operatorname{div}\mathfrak{f},$$

$$\frac{1}{2\beta}\,\Delta(\operatorname{rot}\delta\mathfrak{f}) = -\operatorname{rot}\mathfrak{f},$$

Diese Gleichungen sind zu lösen mit den Randbedingungen, daß an der Oberfläche

$$\frac{\mathfrak{n}\operatorname{div}\delta\mathfrak{f}}{3\alpha} + \frac{1}{\beta}\mathfrak{S}'(\mathfrak{n}) = \mathfrak{p} \quad \text{wird.}$$

Bei gegebenen Deformationen findet man also die Kräfte durch Differentiation. Bei gegebenen Kräften ist aber die Deformation nur durch das viel schwierigere Problem der Lösung einer Differentialgleichung zu ermitteln. Für die einfachsten Fälle genügt es, nach der Differentiationsmethode eine größere Anzahl von speziellen Lösungen aufzustellen und unter diesen die gewünschte Lösung herauszusuchen.

[1]) Es ist meist üblich von dieser Gleichung auszugehen, weil (S^2) und $|S|^2$ die beiden einzigen unabhängigen quadratischen Invarianten der Verschiebung sind. Setzt man $2\omega = A(S^2) + B|S|^2$, so ist $A = \frac{1}{\beta} = \frac{E}{1+\mu} = a_{11} - a_{12}$ und $B = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) = \frac{E\mu}{(1-2\mu)(1+\mu)} = a_{12}$.

Besonders wichtig sind dabei die Fälle, wo die Volumenkräfte $\mathfrak{f}$ verschwinden, da in der Regel nur Oberflächenkräfte in Frage kommen. In diesem Falle kann man sich der *Airyschen Spannungsfunktionen* bedienen, indem man ansetzt:

$$P_{yz} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}, \qquad P_{zx} = -\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x}, \qquad P_{xy} = -\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y},$$

$$P_{xx} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \qquad P_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \qquad P_{zz} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2},$$

wo U, V, W Funktionen von x, y, z sind, welche das Problem charakterisieren. Aus diesen P_{ik} findet man nach Formel (6) die S_{ik}. Andererseits aus $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}(\mathfrak{n})$ die Oberflächenkräfte und $\operatorname{div} \mathfrak{P} = \mathfrak{f} = 0$.

Ein anderes System von Spannungsfunktionen liefert der Ansatz:

$$P_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}, \qquad P_{yy} = \frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x}, \qquad P_{zz} = \frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y},$$

$$P_{yz} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right),$$

$$P_{zx} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right),$$

$$P_{xy} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial z}\right).$$

b) Bewegungsgleichungen in isotropen elastischen Körpern.

$$\varrho \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{f} + \operatorname{div} \mathfrak{P}$$

$$\varrho \cdot \frac{d^2}{dt^2}(\delta \mathfrak{f}) = \mathfrak{f} + \frac{1}{2\beta}\Delta(\delta \mathfrak{f}) + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \delta \mathfrak{f}$$

$$= \mathfrak{f} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta}\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} (\delta \mathfrak{f}) - \frac{1}{2\beta} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\delta \mathfrak{f}).$$

Zerlegt man $\delta \mathfrak{f}$ in $\delta \mathfrak{f}_1$ und $\delta \mathfrak{f}_2$, so daß $\operatorname{div} \delta \mathfrak{f}_1 = 0$; $\operatorname{rot} \delta \mathfrak{f}_2 = 0$, also $\delta \mathfrak{f}_2 = -\operatorname{grad} \varphi$ und sei $\mathfrak{f} = 0$, so wird:

$$\varrho \frac{d^2}{dt^2}(\delta \mathfrak{f}_1) = \frac{1}{2\beta} \cdot \Delta(\delta \mathfrak{f}_1) \quad \textit{(Transversal- oder Scherungswelle)}$$

und

$$\varrho \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta}\right)\Delta \varphi \quad \textit{(Longitudinal- oder Verdichtungswelle).}$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sind

für die transversale Welle $= \sqrt{\frac{1}{2\beta\varrho}} = \sqrt{\frac{E}{2\varrho(1+\mu)}}$

für die longitudinale Welle $= \sqrt{\frac{1}{3\varrho}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta}\right)} = \sqrt{\frac{E}{\varrho}\frac{(1-\mu)}{(1-2\mu)(1+\mu)}}$.

4. Übergang zur Hydrodynamik.

In nicht vollkommen elastischen Körpern verschwinden bei konstanter Deformation die Spannungen $\mathfrak{P}'$ mit der Zeit. Dies führt auf folgenden möglichst einfachen Ansatz:

(1) $$\frac{\partial \mathfrak{P}'}{\partial t} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{S}'}{\partial t} - \frac{1}{\tau} \mathfrak{P}'.$$

Ist

$$\frac{\partial \mathfrak{S}'}{\partial t} = 0,$$

so wird dann

(2) $$\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}_0{}' e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (\tau = \textit{Relaxationszeit}).$$

Schreiben wir $\frac{\partial}{\partial t} \delta \mathfrak{s} = \mathfrak{v}$ und stellen $\mathfrak{v}$ (ebenso wie $\delta \mathfrak{s}$) dar durch

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + \tfrac{1}{2} [\delta \mathfrak{r} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{v}] + \mathfrak{B}(\delta \mathfrak{r})$$

und

$$\mathfrak{B}(\delta \mathfrak{r}) = \delta \mathfrak{r} \frac{\operatorname{div} \mathfrak{v}}{3} + \mathfrak{B}'(\delta \mathfrak{r}),$$

so wird

$$\mathfrak{B}' = \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{S}'; \qquad \frac{\partial \mathfrak{P}'}{\partial t} = \frac{1}{\beta} \mathfrak{B}' - \frac{1}{\tau} \mathfrak{P}'.$$

Für langsam veränderliches $\mathfrak{B}'$ bzw. kleines τ, d. h. Flüssigkeiten, erhalten wir damit:

(3) $$\mathfrak{P}' = \frac{\tau}{\beta} \mathfrak{B}'.$$

$\mathfrak{P}'$ wird also jetzt durch die Geschwindigkeitsverteilung bestimmt. Die Beziehung $|\mathfrak{S}| = \alpha |\mathfrak{P}|$ bleibt erfahrungsgemäß bestehen.

Die Bewegungsgleichungen werden dann[1]:

$$\varrho \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{f} + \operatorname{div} \mathfrak{P} = \mathfrak{f} + \operatorname{div} \left(\mathfrak{E} \frac{|\mathfrak{P}|}{3} + \frac{\tau}{\beta} \mathfrak{B}' \right)$$
$$= \mathfrak{f} - \operatorname{grad} p + \frac{\tau}{2\beta} \left(\Delta \mathfrak{v} + \frac{1}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{v} \right).$$

$\lambda = \frac{\tau}{2\beta}$ heißt Reibungskoeffizient.

Wir erhalten somit

(4) $$\varrho \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{f} - \operatorname{grad} p + \lambda \Delta \mathfrak{v} + \frac{\lambda}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{v}$$

als Bewegungsgleichung einer Flüssigkeit mit innerer Reibung.

5. Hydrodynamik.

Für *reibungsfreie* Flüssigkeiten wird $\lambda = 0$. Die Bewegungsgleichungen lauten daher:

---

[1] $\mathfrak{E}$ bedeutet Einheitstensor (vgl. S. 164).

(1) $$\varrho \cdot \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{f} - \operatorname{grad} p$$

oder

(1') $$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{\mathfrak{f}}{\varrho} - \operatorname{grad} P;$$

wo

$$P = \int \frac{dp}{\varrho}$$

gesetzt werden kann, wenn ϱ eine eindeutige Funktion von p ist, bzw. wegen:

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt} - (\mathfrak{v} \operatorname{grad})\, \mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt} - \frac{1}{2} \operatorname{grad} \mathfrak{v}^2 + [\mathfrak{v} \operatorname{rot} \mathfrak{v}]$$

(2) $$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} = \frac{\mathfrak{f}}{\varrho} - \operatorname{grad}\left(\frac{v^2}{2} + P\right) + [\mathfrak{v} \operatorname{rot} \mathfrak{v}]$$

Eulersche Bewegungsgleichungen.

Ist $\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} = 0$ (*stationäre Strömung*) und $\operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0$ (wirbelfreie oder *Potentialströmung*), so wird

(3) $$\frac{\mathfrak{f}}{\varrho} - \operatorname{grad}\left(\frac{v^2}{2} + P\right) = 0,$$

bzw. bei konstantem ϱ

(3') $$\mathfrak{f} - \operatorname{grad}\left(\varrho \frac{v^2}{2} + p\right) = 0.$$

$\left(\varrho \frac{v^2}{2} + p\right)$ heißt *hydrodynamischer* Druck.

Hat $\mathfrak{f}$ ein Potential, d. h. $\mathfrak{f} = \operatorname{grad} \varphi$, so wird

(4) $$\frac{\partial \operatorname{rot} \mathfrak{v}}{\partial t} = \operatorname{rot}\,[\mathfrak{v} \operatorname{rot} \mathfrak{v}]$$

und daher

(4') $$\frac{d}{dt} \int d\mathfrak{f} \operatorname{rot}_n \mathfrak{v} = \frac{d}{dt} \oint \mathfrak{v}\, d\mathfrak{s} = 0$$

(vgl. 143), d. h. das Wirbelmoment einer mit der Flüssigkeit mitbewegten Fläche bleibt konstant (*Helmholtz*).

Ist $\operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0$, so ist $\mathfrak{v}$ darstellbar als $\mathfrak{v} = \operatorname{grad} \Phi$ (Geschwindigkeitspotential). Es gilt dann

(5) $$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \varphi + P + \frac{1}{2} \operatorname{grad}^2 \Phi = \text{const.}$$

Für inkompressible Flüssigkeit $\varrho = \text{const}$, $T = p$ ergibt die Kontinuitätsgleichung $\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$, also $\Delta \Phi = 0$.

Die meisten Probleme der Hydrodynamik laufen auf die Lösung dieser Differentialgleichung mit Berücksichtigung der durch die Begrenzung der Strömung gegebenen Randbedingungen: $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$, bzw.

$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = V_n$ heraus, wo V_n die Normalkomponente der Geschwindigkeiten der Begrenzung ist.

Bei strengerer Annäherung an die Wirklichkeit ist die Flüssigkeit als an die Begrenzung haftend zu betrachten. Dann ist aber im allgemeinen die Bedingung $\mathrm{rot}\, \mathfrak{v} = 0$ nicht zu erfüllen.

Literatur.

Lehrbücher der analytischen Mechanik, bzw. der theoretischen Physik, s. a. Enzyklopädie der math. Wiss. (Leipzig: B. G. Teubner), Bd. IV: Mechanik, ferner *Routh:* Dynamik der Systeme starrer Körper (Leipzig: B. G. Teubner), *Love-Timpe:* Lehrbuch oer Elastizität (Leipzig: B. G. Teubner), *Lamb:* Lehrbuch der Hydrodynamik (Leipzig: B. G. Teubner).

Zwölfter Abschnitt.

Elektrizitätslehre.

1. Elektrostatik.

Von einer ruhenden *Ladung* e_1 am Ort $\mathfrak{r}_1$ wird auf eine zweite e_2 am Ort $\mathfrak{r}_2$ eine Kraft $\mathfrak{K}_{12}$ ausgeübt, wobei $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2$ sei,

$$(1) \qquad \mathfrak{K}_{12} = \frac{e_1 e_2 (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)}{\varepsilon \, |\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|^3} = \frac{e_1 e_2 \mathfrak{r}}{\varepsilon r^3},$$

wenn der ganze Raum mit einem homogenen isotropen Medium (Dielektrikum) erfüllt ist. ε heißt *Dielektrizitätskonstante* des Mediums. Sie wird für das Vakuum $= 1$ gesetzt. — Wir kennen keinen Stoff mit $\varepsilon < 1$.[1])

Die Ladungen werden durch die Kräfte gemessen. (Das ist immer möglich, sobald drei Ladungen und die Kräfte zwischen je zweien von ihnen gegeben sind. Dann bestimmen sich die Ladungen aus den drei für die Kräfte geltenden Gleichungen.)

Ladungsdichte ϱ heißt bei continuierlich verteilter Ladung der Ausdruck: $\lim\limits_{V=0} \frac{e}{V}$, wo e die im Volumen V enthaltene Ladung bedeutet. Sie ist auch definiert durch $\int \varrho \, dv = e$.

$$(2) \qquad \mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{K}_{12}}{e_2} = \frac{e_1 \mathfrak{r}}{\varepsilon r^3}$$

heißt *Feldstärke* im Punkte der Ladung 2. Sie ist unabhängig von der Größe (und überhaupt der Existenz) von e_2, also eine Funktion des Ortes. $\mathfrak{E}$ bildet ein *Feld*. Daher läßt sich das elektrische Potential φ definieren durch

$$(3) \qquad \mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

Es ist, falls ε konstant ist,

$$(4) \qquad \varphi = \int \frac{\varrho}{\varepsilon r} \, dv$$

und

$$(5) \qquad \varrho = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \Delta \varphi.$$

---

[1]) Im Innern von anisotropen Stoffen ist der Skalar ε durch einen Tensor zu ersetzen (vgl. S. 222).

Aus (2) folgt dann rot $\mathfrak{E} = 0$.

(6) $$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$$

heißt *dielektrische Verschiebung*. Es ist

(7) $$4\pi\varrho = \operatorname{div}\mathfrak{D} = \varepsilon \operatorname{div}\mathfrak{E}.$$

$\mathfrak{D}$ ist in isotropen Stoffen stets parallel zu $\mathfrak{E}$.

Polarisation heißt der Ausdruck

(8) $$\mathfrak{P} = \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{D} - \mathfrak{E}) = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\mathfrak{E}.$$

Die Vektorfelder der $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ lassen sich veranschaulichen durch den Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ der Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit. Den Strömungslinien entsprechen die *Kraftlinien* (für $\mathfrak{E}$), sowie die *Induktionslinien* (für $\mathfrak{D}$).

Als *Zahl* der durch einen Querschnitt q gehenden Kraftlinien bezeichnet man das Integral $\int dq \cdot E_n$ über den Querschnitt, auch *Kraftfluß* genannt. Analog spricht man von *Induktionsfluß*.

Induktionslinien endigen *nur* in den Ladungen, Kraftlinien endigen außerdem im Raum, sobald die Dielektrizitätskonstante sich ändert. Man spricht dann von *freien Ladungen*:

(9) $$\varrho' = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\mathfrak{E}; \ \operatorname{div}\mathfrak{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon}\varrho + \frac{1}{\varepsilon}\left(\mathfrak{E}\operatorname{grad}\frac{1}{\varepsilon}\right) = 4\pi\varrho', \ \varphi = \int\frac{\varrho' dv}{r}.$$

An der Trennungsfläche zweier Stoffe verschiedener Dielektrizitätskonstanten bleibt die Normalkomponente von $\mathfrak{D}$ stetig, ebenso die Parallelkomponente von $\mathfrak{E}$.

Bildet im Stoff 1 die Richtung von $\mathfrak{D}$ (bzw. $\mathfrak{E}$) mit der Normalen den Winkel α_1 und entsprechend im Stoff 2 den Winkel α_2, so ist $\operatorname{tg}\alpha_1 : \operatorname{tg}\alpha_2 = \varepsilon_1 : \varepsilon_2$ (Brechungsgesetz der Kraftlinien).

Die Flächendichte ω ist bei kontinuierlich auf einer Fläche verteilter Ladung definiert durch $\omega = \lim\limits_{F=0}\frac{e}{F}$ oder durch

$$\int\limits_F \omega\, df = e$$

wo e gleich der auf der Fläche F befindlichen Ladung ist. Das ergibt die Beziehung

(10) $$4\pi\omega = -(D_{n1} + D_{n2}),$$

wo $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ die Verschiebungen auf den beiden Seiten der Fläche sind. Entsprechend heißt ω', definiert durch

(11) $$4\pi\omega' = -(E_{n1} + E_{n2}),$$

die Flächendichte der freien Ladung.

Die *Energie* eines Ladungssystems ist gleich

(12) $U = \frac{1}{2}\int dv\, \varphi \cdot \varrho + \frac{1}{2}\int df\, \varphi\omega = \frac{1}{8\pi}\int dv\, (\mathfrak{E}\mathfrak{D}) = \frac{1}{8\pi}\int dv\, \varepsilon \mathfrak{E}^2.$

Leiter der Elektrizität heißen Körper, in denen im Gleichgewichtszustand φ konstant ist. Im Inneren von Leitern ist $\mathfrak{E}$ und $\varrho = 0$. Sie können nur eine Oberflächenladung besitzen. Ein Leiter verhält sich bei statischen Problemen wie ein Stoff unendlich großer Dielektrizitätskonstante.

Die elektrische Energie ist im Gleichgewichtszustand ein *Minimum* gegenüber der aller andern Ladungsverteilungen, die bei den gegebenen Ladungen auf den Leitern möglich sind.

2. Elektrokinetik.

Jeder Ladungstransport heißt *elektrischer Strom.*

Stromstärke I heißt die durch eine gegebene Fläche F in der Zeiteinheit transportierte Elektrizitätsmenge. *Stromdichte* $\mathfrak{i}$ ist definiert durch

(1) $$\int_F \mathfrak{i}_n\, df = I = \frac{de}{dt} = \int dv \operatorname{div} \mathfrak{i}.$$

Man unterscheidet die Dichte des

1. *Leitungsstroms* $\mathfrak{i} = \sigma\mathfrak{E}$ (σ heißt Leitfähigkeit).
2. *Konvektionsstroms* $\mathfrak{k} = \varrho\mathfrak{v}$.
3. *Verschiebungsstroms* $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{D}}{dt}$. Dies ist als Strom zu deuten, wegen

$$\frac{1}{4\pi}\int df \frac{\partial}{\partial t} D_n = \frac{1}{4\pi}\int dv \operatorname{div}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int dv \cdot \varrho = \frac{de}{dt}.$$

Als *wahren Strom* $\mathfrak{c}$ bezeichnet man

(2) $$\mathfrak{c} = \sigma\mathfrak{E} + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{d\mathfrak{E}}{\partial t} + \varrho\mathfrak{v}.$$

Es gilt immer $\operatorname{div} \mathfrak{c} = 0$.

Stationäre Ströme in Drähten. Ist ein Leitungsstrom, für den $\frac{\partial i}{\partial t} = 0$ ist, auf einen Leiter von geringem Querschnitt q beschränkt, so ist $I = \int_q i_n\, df$ eine Konstante längs des Drahtes.

Die Potentialdifferenz $\varphi_1 - \varphi_2$ zwischen zwei Punkten des Drahtes ist dann proportional I.

(3) $$\int_1^2 (\mathfrak{E}\, d\mathfrak{s}) = \varphi_1 - \varphi_2 = WI.$$

W heißt *Widerstand.*

(4) $$W = \int_1^2 \frac{ds}{q\sigma}.$$

W ist bei gegebenen Dimensionen und Leitfähigkeit unabhängig von I (*Ohmsches Gesetz*).

Elektrischer Kreis. In einem geschlossenen Kreis ist $\oint \mathfrak{E}\, d\mathfrak{s} = 0$. Ist aber in einem Bereiche die Beziehung $\frac{\mathfrak{i}}{\sigma} - \mathfrak{E} = 0$ durchbrochen (Element, elektrolytische Zelle usw.), so heißt $\int \left(\frac{\mathfrak{i}}{\sigma} - \mathfrak{E}\right) d\mathfrak{s}$ *elektromotorische Kraft* E und es gilt:

(5) $$I = \frac{E}{W}.$$

3. Magnetostatik.

Die Magnetostatik entspricht der Elektrostatik in folgenden Punkten:

Der Ladung e entspricht die magnetische Menge m.

Der Dielektrizitätskonstante ε entspricht die Permeabilität μ.

Der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ entspricht die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$.

Der Verschiebung $\mathfrak{D}$ entspricht die Induktion $\mathfrak{B}$ (wobei $\mathfrak{B} = \mu\,\mathfrak{H}$).

Der Polarisation $\mathfrak{P}$ entspricht die Magnetisierung $\mathfrak{M}$.

Alle Formeln der Elektrostatik gehen dann in die entsprechenden der Magnetostatik über.

Abweichungen. Leiter des Magnetismus gibt es nicht, wohl aber verhalten sich Stoffe mit großem μ annähernd wie Leiter.

μ ist im Gegensatz zu ε für viele (ferromagnetische) Stoffe keine Konstante, sondern sowohl von der Feldstärke wie von der Vorgeschichte abhängig (Hysteresis). Jeder Magnetpol m ist mit einem andern $-m$ verbunden.

4. Elektromagnetismus.

Strömende Elektrizitätsmengen üben auf andere strömende außer den elektrostatischen auch „elektromagnetische" Kräfte aus.

Von einem stromdurchflossenen System wird auf ein Stromelement der Länge und Richtung $d\mathfrak{l}$, in dem ein Strom der Stärke I fließt, eine Kraft

(1) $$\mathfrak{K} = \frac{\mu I}{c^2}\left[d\mathfrak{l} \int \frac{dv\,[\mathfrak{i}\mathfrak{r}]}{r^3}\right]$$

ausgeübt, wobei das Integral über das mit der Stromdichte $\mathfrak{i}$ durchflossene System zu erstrecken und $\mathfrak{r}$ der vektorielle Abstand vom Stromelement $d\mathfrak{l}$ zum Volumelement dv ist (*Biot-Savart*sches Gesetz).

(2) $\frac{1}{c}\int \frac{dv\,[\mathfrak{i}\mathfrak{r}]}{r^3} = \mathfrak{H}$ heißt magnetische Feldstärke. Das so definierte $\mathfrak{H}$ ist mit dem magnetostatisch definierten identisch. Der Faktor c hat die Dimension einer Geschwindigkeit und ist experimentell zu $3 \cdot 10^{10}$ cm/sec, also gleich der *Lichtgeschwindigkeit* gefunden. Es ist also

(3) $$\mathfrak{K} = \frac{\mu I [d\mathfrak{l}\,\mathfrak{H}]}{c}.$$

Es folgt, daß $\operatorname{div} \mu \mathfrak{H} = \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$ ist. Nach dieser Auffassung endigen die Induktionslinien ($\mathfrak{B}$) nirgends (auch nicht an den Polen eines Magneten, sondern setzen sich im Innern desselben fort). Es läßt sich daher ein magnetisches Vektorpotential definieren durch

$$\mathfrak{B} = \operatorname{rot} \mathfrak{A},$$

und es wird

(4) $$\mathfrak{A} = \frac{\mu}{c} \int \frac{dv\, \mathfrak{i}}{r}$$

und

(5) $$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi \mathfrak{i}}{c}.$$

Magnetischer Kreis. In Stoffen sehr hoher Permeabilität (Eisen) verlaufen die Induktionslinien ($\mathfrak{B}$) angenähert wie die Stromlinien in Leitern.

Hat man es mit einem geschlossenen Eisenkreis zu tun, so gelten die zum elektrischen Kreis analogen Formeln. Der Formel $\mathfrak{i} = \sigma \mathfrak{E}$ entspricht dann $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$. $M = \oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{s}$ wird hier aber nicht gleich Null, sondern $= \frac{4\pi}{c} \int_F i_n\, df$, wo das Integral über die durch den Kreis begrenzte Fläche zu nehmen ist. Fließt der Strom in n Drahtwindungen mit der Stärke I durch diese Fläche, so wird

(6) $$M = \oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{s} = \frac{4\pi n I}{c}.$$

Diese Größe kann als *magnetisierende* Kraft bezeichnet werden. Es wird dann $I_m = \int_q B_n\, df$ der gesamte Induktionsfluß, oder

$$I_m = \frac{M}{W_m},$$

wo

(7) $$W_m = \oint \frac{ds}{q\mu}$$

ist, in Analogie zu $I = \frac{E}{W}$.

5. Elektrodynamik.

Nach *Maxwell* ist der Verschiebungsstrom $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$ in seiner magnetischen Wirkung äquivalent einem Leitungsstrom $\mathfrak{i}$. Daher folgt durch Verallgemeinerung:

(1) $$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi \mathfrak{i}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \qquad \text{1. Hauptgleichung.}$$

Durch Analogie und auf Grund von Experimenten (Induktion) folgt ferner:

(2) $$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \qquad \text{2. Hauptgleichung.}$$

welche auf Grund des *Stokes*schen Satzes auch lautet

(3) $$\oint (\mathfrak{E}\, d\mathfrak{s}) = -\frac{1}{c}\int df \frac{\partial B_n}{\partial t}$$ (Induktionsgesetz).

Die Energie eines Feldes besteht aus einem elektrischen Teil U und einem magnetischen Teil T

(4) $$W = U + T = \frac{1}{8\pi}\int dv\,(\varepsilon E^2 + \mu H^2).$$

Hieraus folgt

(5) $$\frac{dW}{dt} = -\int dv\,(\mathfrak{E}\,\mathfrak{i}) - \frac{c}{4\pi}\int df\,[\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}]_n.$$

$\frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = \mathfrak{S}$ heißt *Poyntingscher Vektor.*

Da $\int df\,\mathfrak{S}$ hiernach der Energieverlust pro Zeiteinheit durch die Oberfläche F darstellt, wird $\mathfrak{S}$ als der *Vektor der Energieströmung* gedeutet.

Durch Elimination von $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{E}$ aus den Hauptgleichungen folgt:

(6) $$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \Delta\mathfrak{E} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{E}$$

bzw.

(6') $$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \Delta\mathfrak{H},$$

d. h. eine Wellengleichung für $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{H}$.

In Analogie zur Elastizitätslehre kann man die Kräfte in einem statischen elektromagnetischen Feld auf die *Maxwellschen Spannungen* zurückführen, in der Form

$\mathfrak{p} = \operatorname{div}\mathfrak{T}$, wobei $\mathfrak{p}$ die Kraft auf die Volumeneinheit bedeutet, also $\int \mathfrak{p}\, dv = \mathfrak{K}$ und wo $\mathfrak{T}$ durch die elektrischen und magnetischen Kräfte bestimmt ist durch:

(7) $$\mathfrak{T}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{E}(\mathfrak{E}\mathfrak{a}) - \frac{\mathfrak{a}E^2}{2} + \mathfrak{H}(\mathfrak{H}\mathfrak{a}) - \frac{\mathfrak{a}H^2}{2}$$ [1]
$$T_{ik} = \tfrac{1}{2}g_{ik}(E)^2 - E_i E_k + \tfrac{1}{2}g_{ik}(H)^2 - H_i H_k.$$

In einem nicht statischen Felde erweitert sich diese Beziehung zu:

(8) $$\mathfrak{p} = \operatorname{div}\mathfrak{T} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial t}.$$

$\mathfrak{g} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\mathfrak{S}$ heißt *elektromagnetische Bewegungsgröße.*

---

[1] Diese Gleichung kann so gedeutet werden, daß man $\mathfrak{T}(\mathfrak{n})$ als eine Spannungskraft in Richtung $\mathfrak{n}$ auffaßt. Ist dann $\mathfrak{n} \parallel \mathfrak{E}$, so wird der erste Teil $= \frac{E^2}{2}$, das bedeutet einen Zug. Ist $\mathfrak{n} \perp \mathfrak{E}$, so wird der erste Teil $= -\frac{E^2}{2}$, das bedeutet einen Druck. Man findet so die *Faraday*sche Auffassung, daß in Richtung der Kraftlinien ein Zug und senkrecht dazu ein Druck wirkt.

Es tritt hier zu der statischen Kraft $\mathfrak{T}$ noch eine dynamische $\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t}$, die man als *Trägheit der elektromagnetischen Energie* deuten kann, deren Masse dann gleich $\frac{W}{c^2}$ zu setzen ist.

6. Elektrodynamik quasistationärer Ströme.

Wenn man in der 1. Hauptgleichung $\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$ neben $4\pi\mathfrak{i}$ vernachlässigen kann, d. h. bei relativ langsam veränderlichen Feldern und Strömen, treten Vereinfachungen ein.

Fließt der Strom in einen geschlossenen Draht 1, so tritt zu der bisherigen elektromotorischen Kraft E noch eine induzierte elektromotorische Kraft E^i hinzu:

$$(1)\qquad E^i = \int \mathfrak{E}^i\, d\mathfrak{s}_1 = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int df B_n = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \mathfrak{A}\, d\mathfrak{s} \qquad (\mathfrak{B} = \mathrm{rot}\,\mathfrak{A}).$$

Rührt $\mathfrak{B}$ von einem Stromkreis 2 mit dem Strom I_2 her, so wird

$$\mathfrak{B} = \mu\frac{I_2}{c}\int\frac{[d\mathfrak{s}_2\mathfrak{r}]}{r^3}, \qquad \mathfrak{A} = \mu\frac{I_2}{c}\int\frac{d\mathfrak{s}_2}{r},$$

also

$$(2)\qquad E_1^i = \mu\int\int\frac{d\mathfrak{s}_1\, d\mathfrak{s}_2}{r_{12}}\cdot\frac{dI_2}{dt}.$$

$L_{12} = \mu\int\int\frac{d\mathfrak{s}_1 d\mathfrak{s}_2}{r_{12}}$ heißt *gegenseitiger Induktionskoeffizient.*

Betrachtet man die Induktion verschiedener Stromteile $d\mathfrak{s}_1$ und $d\mathfrak{s}_1'$ ein und desselben Stromkreises aufeinander, so werden obige zwei Stromkreise identisch, die Größe $L_1 = 2\mu\int\int\frac{d\mathfrak{s}_1 d\mathfrak{s}_1'}{r_{11}'}$ heißt *Selbstinduktionskoeffizient.*

Für einen Stromkreis gilt daher

$$(3)\qquad E_1^i = -L_1\frac{dI_1}{dt} - \sum_n L_{1n}\frac{dI_n}{dt}.$$

7. Elektronentheorie.

Die Elektronentheorie nimmt an, daß es weder über größere Räume kontinuierlich verteilte Ladungen und Ströme gibt, noch Räume in denen ε und μ von 1 abweicht.

Alle Ladungen sollen in sehr kleinen Voluminas konzentriert, alle Ströme reine Konvektionsströme sein. Die größeren Werte von ε und μ, sowie σ sollen durch den atomistischen Mechanismus beweglicher elektrischer Ladungen makroskopisch vorgetäuscht werden.

Nach dieser Theorie ist also $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ zu setzen, so daß

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{i} = \varrho\mathfrak{v} = \mathfrak{k} \quad \text{ist.}$$

Kinetische Potentiale. Wir definieren Φ durch

(1) $$\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\Phi, \qquad \mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}$$

(1') $$\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\operatorname{div}\mathfrak{A},$$

dann folgt

(2) $$\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta\Phi = 4\pi\varrho,$$ Φ und $\mathfrak{A}$ heißen *kinetische Potentiale*

(2') $$\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} - \Delta\mathfrak{A} = 4\pi\mathfrak{k}.$$

Wir definieren den *Hertzschen Vektor* $\mathfrak{Z}$ aus $\mathfrak{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}$, ferner $\mathfrak{q}$ durch $\mathfrak{k} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial t}$, dann wird $\Phi = \varphi - \operatorname{div}\mathfrak{Z}$

(3) $$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\varphi + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2}; \qquad \mathfrak{H} = \frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t},$$

und für $\mathfrak{Z}$ gilt

(4) $$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} - \Delta\mathfrak{Z} = 4\pi\mathfrak{q}.$$

Die Lösung dieser Gleichungen lautet

(5) $$\Phi_t = \int \frac{dv}{r}\{\varrho\}_{t-\frac{r}{c}}$$
$$\mathfrak{A}_t = \int \frac{dv}{r}\{\mathfrak{k}\}_{t-\frac{r}{c}}$$
$$\mathfrak{Z}_t = \int \frac{dv}{r}\{\mathfrak{q}\}_{t-\frac{r}{c}}$$

Der Index $t - \frac{r}{c}$ bedeutet, daß die ϱ, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{q}$, die ja Funktionen des Ortes und der Zeit sind, in der Formel nicht mit den der Zeit t, sondern den mit der Zeit $t - \frac{r}{c}$ entsprechenden Werten einzusetzen sind, um Φ, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{Z}$ für die Zeit t zu finden.

Die Wirkung einer Ladung usw. macht sich also im Aufpunkt nicht sofort, sondern erst nach der Zeit $\frac{r}{c}$ bemerkbar (daher der Ausdruck: *Retardierte* Potentiale).

Diese Form der Lösung bringt es mit sich, daß nur für sehr kleines r, bzw. bei langsam wechselndem ϱ, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{q}$ die statischen Beziehungen gelten.

Methodisch vorteilhaft ist die daraus folgende Vorschrift: Man denke sich zur Zeit t eine Kugelwelle mit der Geschwindigkeit $-c$ vom Aufpunkt ausgehen. Alle Ladungen wirken dann mit dem Betrag, den sie während des Hinüberstreichens dieser Welle haben.

Mit Hilfe dieser Formeln lassen sich die Felder bewegter Ladungen berechnen.

Für eine *gleichförmig geradlinig mit* $\mathfrak{v}$ *sich bewegende Ladung* e findet man:

$$\Phi = \frac{e}{\sqrt{r^2(1-\beta^2) + \left(\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{v}}{c^2}\right)}} \qquad \text{wo } \beta = \frac{v}{c} \text{ ist.}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{e\,\mathfrak{v}}{c\sqrt{r^2(1-\beta^2) + \left(\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{v}}{c^2}\right)}}$$

und daraus

$$\mathfrak{E} = \frac{(1-\beta^2)\,e\,\mathfrak{r}}{\sqrt{}^{3}}$$

$$\mathfrak{H} = \frac{(1-\beta^2)\,e\,[\mathfrak{v}\mathfrak{r}]}{c\sqrt{}^{3}}.$$

$\Phi = \text{const}$ stellt ein abgeplattetes Rotationsellipsoid dar mit dem Achsenverhältnis $\sqrt{1-\beta^2}$ (*Heaviside-Ellipsoid*).

Die Kraft auf eine zweite gleichfalls mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegte Ladung e_2 wird dann gleich

$$\mathfrak{K} = e_2\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{H}]\right) = -(1-\beta^2)\operatorname{grad}\Phi$$

$$\Psi = (1-\beta^2)\,\Phi \text{ heißt } \textit{Konvektionspotential.}$$

Dipolstrahlung. Das Moment $\mathfrak{p}$ eines Dipols sei als Funktion der Zeit gegeben. Die Geschwindigkeit seiner Bestandteile sei klein gegen c. Dann ist für einen Punkt $\mathfrak{r}$, wo r groß gegen die Dimension des Dipols sei,

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{p}}{r}$$

$$\mathfrak{E} = \frac{3\mathfrak{r}(\mathfrak{p}\mathfrak{r}) - r^2\mathfrak{p}}{r^5} + \frac{3\mathfrak{r}(\dot{\mathfrak{p}}\mathfrak{r}) - r^2\dot{\mathfrak{p}}}{c\,r^4} + \frac{1}{c^2 r^3}[\mathfrak{r}[\mathfrak{r}\ddot{\mathfrak{p}}]]$$

$$\mathfrak{H} = -\frac{[\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{p}}]}{c\,r^3} - \frac{1}{c^2 r^2}[\mathfrak{r}\ddot{\mathfrak{p}}],$$

wobei $\mathfrak{p}$ das Moment zur Zeit $\left(t - \frac{r}{c}\right)$ bedeuten soll und

$$\dot{\mathfrak{p}} = \frac{d\mathfrak{p}}{dt}; \quad \ddot{\mathfrak{p}} = \frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2}.$$

Für großes $\mathfrak{r}$ wird hiernach $\mathfrak{S} = \frac{\mathfrak{r}}{4\pi c^2 r^5}[\mathfrak{r}\ddot{\mathfrak{p}}]^2$.

Die Ausstrahlung pro Zeiteinheit wird dann

$$-\frac{dW}{dt} = \int S_n\,df = \frac{2}{3c^3}(\ddot{\mathfrak{p}})^2.$$

Ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \cdot \sin\omega t = \mathfrak{p}_0 \cdot \sin\frac{2\pi}{\lambda}ct$ (λ = Wellenlänge), so wird

$$\frac{dW}{dt} = \frac{32\pi^4}{3}\,\frac{c}{\lambda^4}\,(\mathfrak{p}^2).$$

8. Elektromagnetische Wellen (Grundlagen der Optik).

Jede Lösung der *Maxwell*schen Gleichungen bzw. der Wellengleichung S. 194 bedeutet einen elektromagnetischen Ausbreitungsvorgang. Als *Welle* im engeren Sinne pflegt man eine Lösung der Form: $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 e^{i\omega t}$, wo $\mathfrak{E}_0$ nur vom Ort abhängt, zu bezeichnen. $n = \frac{\omega}{2\pi}$ heißt ihre *Schwingungszahl*. Von der komplexen Lösung ist dann der Realteil zu nehmen. Der Imaginärteil stellt eine zweite Welle dar. Besonders einfache Wellentypen sind die partikulären Lösungen (vgl. S. 95).

Schreibt man

$$(1) \qquad \mathfrak{E}_0 = \mathfrak{a} e^{i\omega\varphi} \text{ bzw. } \mathfrak{E} = \mathfrak{a} e^{i\omega(\varphi + t)},$$

wo $\mathfrak{a}$ und φ Funktionen der Orte sind, so heißt $\mathfrak{a}$ die *Amplitude* und φ die *Phase* der Welle. Die Flächen konstanten φ heißen *Wellenflächen*. $\frac{2\pi}{\omega|\operatorname{grad}\varphi|}$ heißt *Wellenlänge*.

Im Grenzfall von sehr großem ω, d. h. sehr kleiner Wellenlänge erhält man für φ die Differentialgleichung $(\operatorname{grad}\varphi)^2 = 1$; d. h. die Wellenflächen sind Parallelflächen. Die Orthogonalen zu diesen sind gerade Linien. Man bezeichnet sie als *Strahlen*. Dieser Grenzfall liefert daher die *geometrische Optik*.

Ebene Wellen: Die *Maxwell*schen Gleichungen gestatten folgende partikuläre Lösung:

$$(2) \qquad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 e^{i\omega\left(t - \frac{(\mathfrak{r}\mathfrak{n})}{c} p\right)}; \qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 e^{i\omega\left(t - \frac{(\mathfrak{r}\mathfrak{n})}{c} p\right)}$$

wo $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{H}_0$, ω, $\mathfrak{n}$ willkürliche Konstanten sind, zwischen denen aber die folgenden Beziehungen bestehen müssen: $\mathfrak{n}^2 = 1$; $(\mathfrak{E}_0\mathfrak{n}) = 0$; $(\mathfrak{H}_0\mathfrak{n}) = 0$; $\mathfrak{H}_0 = -\frac{p}{\mu}[\mathfrak{n}\mathfrak{E}_0]$ mit $p = \sqrt{\varepsilon\mu - \frac{i4\pi\sigma\mu}{\omega}}$

$\mathfrak{n}$ heißt Wellennormale, $(\mathfrak{r}\mathfrak{n}) = \text{konst.}$ ist die Wellenebene,
p heißt (komplexer) *Brechungsindex*.

Die Konstanten können reell oder komplex sein. Es bedeutet:

$\mathfrak{E}_0$ reell eine linear polarisierte Welle,
$\mathfrak{E}_0$ komplex eine elliptisch polarisierte Welle,
ω komplex eine zeitlich gedämpfte, abklingende Welle,
p komplex eine örtlich gedämpfte Welle (Absorption),
$\mathfrak{n}$ komplex eine Welle mit in der Wellenebene abfallender Amplitude (nur an Oberflächen existenzfähig).

Im folgenden ist die Lösung noch einmal in spezieller Form behandelt.

$\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ seien nur Funktionen von x und t (nicht y und z). Dann vereinfacht sich die Wellengleichung zu:

$$(3) \qquad \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{\partial^2\mathfrak{E}}{\partial x^2}.$$

Wegen $\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ und div $\mathfrak{E} = 0$ wird $\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$, also E_x überhaupt unabhängig vom Ort.

Die Welle ist also rein *transversal*.

Setzt man $E_y = E_{0y} \cdot e^{i\omega t}$ und $E_z = E_{0z} e^{i\omega t}$ für $x = 0$, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} E_y &= E_{0y} \cdot e^{i\omega\left(t - p\frac{x}{c}\right)} \\ E_z &= E_{0z} \cdot e^{i\omega\left(t - p\frac{x}{c}\right)} \end{aligned}\right\} \text{wo } p^2 = \varepsilon\mu - \frac{i \cdot 4\pi\sigma\mu}{\omega},$$

$$H_y = E_{0z} \frac{p}{\mu} \cdot e^{i\omega\left(t - p\frac{x}{c}\right)}$$

$$H_z = E_{0y} \frac{p}{\mu} \cdot e^{i\omega\left(t - p\frac{x}{c}\right)}.$$

Zerlegt man $p = n - ik$, wo

$$n^2 - k^2 = \varepsilon\mu, \quad n \cdot k = \frac{2\pi\sigma\mu}{\omega}$$

bzw.

$$n^2 = \frac{\mu}{2}\left(\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{16\sigma^2\pi^2}{\omega^2}} + \varepsilon\right)$$

$$k^2 = \frac{\mu}{2}\left(\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{16\pi^2\sigma^2}{\omega^2}} - \varepsilon\right),$$

so schreibt sich dies auch:

$$E_y = E_{0y} e^{-\frac{k\omega x}{c}} \cdot e^{i\omega\left(t - \frac{nx}{c}\right)} \quad \text{usw.}$$

$\frac{c}{n}$ ist also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle,
n heißt *Brechungsexponent* für $\sigma = 0$ gleich $\sqrt{\varepsilon\mu}$,
p heißt *komplexer Brechungsexponent*,
k heißt *Absorptionskoeffizient*.[1])

Für reelles n $(\sigma = 0)$ ist $E_z \sim H_y$ und $E_y \sim H_z$.

Für imaginäres p $(\sigma \neq 0)$ sind E_z und H_y um den Phasenwinkel arctg $\frac{k}{n}$ gegen einander verschoben. E_z bleibt hinter H_y zurück.

9. Wellen in anisotropen Medien (Kristalloptik).

Wir setzen

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A}(\mathfrak{E}) \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{A}^{-1}(\mathfrak{D}); \quad \mu = 1.$$

Hier sei $\mathfrak{A}$ ein symmetrischer Tensor ($\mathfrak{A}^{-1}$ der entsprechende reziproke), der an die Stelle des Skalars ε tritt.

---

[1]) Vielfach wird auch $\delta = \frac{k\omega}{c}$ als Absorptionskoeffizient bezeichnet.

Der Ansatz für eine ebene Welle für reelles p $\left(\sigma = 0,\ v = \frac{c}{p}\right)$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0\, e^{i\omega\left(t - \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{n}}{v}\right)}$$

usw. in die Wellengleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{D}}{\partial t} &= \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{E} \\ &= \Delta\mathfrak{E} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{E} \end{aligned}$$

eingesetzt, ergibt dann

$$(1) \qquad \frac{v^2}{c^2}\cdot\mathfrak{D} - \mathfrak{E} + \mathfrak{n}(\mathfrak{n}\mathfrak{E}) = 0\,.$$

Hieraus folgt: $(\mathfrak{D}\mathfrak{n}) = 0$. Aus der 1. Maxwellschen Gleichung folgt:

$$\frac{v}{c}\cdot\mathfrak{D} = [\mathfrak{n}\mathfrak{H}] \quad \text{und} \quad \frac{v}{c}\cdot\mathfrak{H} = -[\mathfrak{n}\mathfrak{E}],$$

also

$$(\mathfrak{H}\mathfrak{n}) = 0; \quad (\mathfrak{H}\mathfrak{D}) = 0\,.$$

Man sieht: $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{n}$ sind komplanar, orthogonal zu $\mathfrak{H}$. Da durch $\mathfrak{D}$ auch $\mathfrak{E}$ bestimmt ist, so ist auch $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{H}$ bestimmt, und damit auch v durch:

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{(\mathfrak{E}\mathfrak{D})}{D^2};$$

ferner ist

$$\frac{v^2}{c^2}(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) - E^2 + (\mathfrak{n}\mathfrak{E})^2 = 0; \quad (\mathfrak{n}\mathfrak{E}) = \sqrt{E^2 - D^2\frac{v^4}{c^4}},$$

also nach (1)

$$\mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{E} - \mathfrak{D}\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{E^2 - D^2\frac{v^4}{c^4}}} = \frac{\mathfrak{E}D^2 - \mathfrak{D}(\mathfrak{E}\mathfrak{D})}{D\sqrt{E^2D^2 - (\mathfrak{E}\mathfrak{D})^2}} \quad \text{und} \quad v = \pm\frac{c}{D}\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{D}}\,.$$

Die Wellennormale und die Geschwindigkeit sind daher vollständig durch die Schwingungsrichtung $\mathfrak{D}$ bestimmt.

Ist $\mathfrak{n}$ gegeben, so ist (1) ein homogenes lineares Gleichungssystem der 3 Komponenten von $\mathfrak{D}$. Es ist nur lösbar, falls die Determinante der Koeffizienten verschwindet. Das ergibt eine Gleichung 3. Grades für v^2 (Säkulargleichung), die sich wegen des Verschwindens ihres absoluten Gliedes auf eine 2. Grades reduziert[1].

---

[1]) Man kann aus (1) $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ eliminieren durch Anwendung der Formel:

$$(\mathfrak{T}\mathfrak{a}\mathfrak{b}) - |\mathfrak{T}|(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = |T|\left\{(\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{a}\,\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{b}) - |\mathfrak{T}^{-1}|(\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{a}\mathfrak{b})\right\},$$

indem man $\mathfrak{a} = \mathfrak{D}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{n}$, $\mathfrak{T} = \mathfrak{A}$ setzt. Dies ergibt

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{D}\mathfrak{n}) = |A|\left\{(\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{E}\mathfrak{n}) - |\mathfrak{A}^{-1}|(\mathfrak{E}\mathfrak{n})\right\}.$$

Setzt man aus (1) $\mathfrak{D} = \frac{c^2}{v^2}(\mathfrak{E} - \mathfrak{n}(\mathfrak{E}\mathfrak{n}))$ und $\mathfrak{E} = \mathfrak{D}\cdot\frac{v^2}{c^2} + \mathfrak{n}(\mathfrak{E}\mathfrak{n})$, so erhält man

$$\frac{v^4}{c^4} + \frac{v^2}{c^2}\left\{(\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{n}\mathfrak{n}) - |\mathfrak{A}^{-1}|\right\} + \frac{(\mathfrak{A}\mathfrak{n}\mathfrak{n})}{|A|} = 0\,.$$

Aus dieser Gleichung kann man die zwei Werte von v als Funktion von $\mathfrak{n}$ berechnen.

Für ein gegebenes $\mathfrak{n}$ gibt es daher 2 Geschwindigkeiten v_1 und v_2 und zwei Schwingungsrichtungen $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$. Da für beide $\mathfrak{D}$ $(\mathfrak{D}\mathfrak{n}) = 0$ ist, findet man:

$$\frac{v_1^2}{c^2}(\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2) - (\mathfrak{E}_1\mathfrak{D}_2) = 0 = \frac{v_2^2}{c^2}(\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1) - (\mathfrak{E}_2\mathfrak{D}_1).$$

Da also $(\mathfrak{E}_1\mathfrak{D}_2) = (\mathfrak{E}_2\mathfrak{D}_1)$ ist [wegen $\mathfrak{E}_1\mathfrak{A}(\mathfrak{E}_2) = \mathfrak{E}_2\mathfrak{A}(\mathfrak{E}_1)$ (s. S. 140)], so wird $(\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2)(v_1^2 - v_2)^2 = 0$.

Zu den zwei verschiedenen v gehören also zwei orthogonale $\mathfrak{D}$ $(\mathfrak{D}_1 \perp \mathfrak{D}_2)$.

Die Säkulargleichung für v^2 führt bei solcher Wahl des Koordinatensystems, daß die $\mathfrak{A}_{ik}^{-1}$ für $i \neq k$ verschwinden (Transformation auf Hauptachsen), auf die *Fresnelsche Gleichung;* wenn $\mathfrak{A}_{ii}^{-1} = \frac{c^2}{a_i^2}$ gesetzt wird $\sum_i \frac{n^2}{a_i^2 - v^2} = 0$.

Trägt man v als Radiusvektor in allen möglichen Richtungen $\mathfrak{n}$ auf, so erhält man eine Fläche, die *Normalenfläche.*

Es gibt im allgemeinen zwei Richtungen $\mathfrak{n}$, für die $v_1 = v_2$ wird, die *optischen Achsen.*

Geometrisch kann die Gleichung (1) wie folgt gelöst werden:

Man beschreibt das Ellipsoid $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{A}^{-1}(\mathfrak{r}) = 1$, schneidet es mit der Ebene $(\mathfrak{n}\mathfrak{r}) = 0$ (die senkrecht zu $\mathfrak{n}$ durch $\mathfrak{r} = 0$ geht), und sucht Richtungen und Längen der Halbachsen, der Schnittellipse. Für diese gilt $\delta(r^2) = 0$. Man erhält:

$$\mathfrak{r}\delta\mathfrak{r} = 0$$

und die Nebenbedingungen:

$$\mathfrak{A}^{-1}(\mathfrak{r})\,\delta\mathfrak{r} = 0$$

$$\mathfrak{n}\,\delta\mathfrak{r} = 0,$$

also

$$\mathfrak{A}^{-1}(\mathfrak{r}) + \sigma_1\mathfrak{r} + \sigma_2\mathfrak{n} = 0.$$

Durch Multiplikation mit $\mathfrak{n}$ bzw. $\mathfrak{r}$ folgt

$$\sigma_1 = -\frac{1}{r^2}; \quad \sigma_2 = -\mathfrak{n}\mathfrak{A}^{-1}(\mathfrak{r}),$$

also

$$\mathfrak{A}^{-1}(\mathfrak{r}) - \frac{\mathfrak{r}}{r^2} - \mathfrak{n}(\mathfrak{A}^{-1}(\mathfrak{r})\mathfrak{n}).$$

Wenn wir in letzterer Gleichung $\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{A}^{-1}(\mathfrak{r})$ mit $\mathfrak{E}$ und r^2 mit $\frac{c^2}{v^2}$ identifizieren, so geht sie über in unsere Gleichung (1). Die Längen der Halbachsen der Schnittellipse sind demnach gleich $\frac{c}{v_1}$ bzw. $\frac{c}{v_2}$ und ihre Richtungen die von $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$.

Die Fortpflanzung der Energie erfolgt senkrecht zu $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ in Richtung von $\mathfrak{s}$.

$\mathfrak{s}$ sei ein Einheitsvektor $(s^2 = 1)$ $(\mathfrak{E}\mathfrak{s}) = 0$; $(\mathfrak{H}\mathfrak{s}) = 0$.

$\mathfrak{s}$ ist komplanar mit $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{n}$.

Wir setzen $\mathfrak{D} + \alpha\mathfrak{E} + \beta\mathfrak{s} = 0$. Multiplikation mit $\mathfrak{s}$ bzw. $\mathfrak{n}$ ergibt

$$\beta = -(\mathfrak{D}\mathfrak{s}), \quad \alpha = \frac{(\mathfrak{D}\mathfrak{s})(\mathfrak{n}\mathfrak{s})}{(\mathfrak{E}\mathfrak{n})}.$$

Aus Gleichung (1) folgt

$$\frac{(\mathfrak{D}\mathfrak{s})}{(\mathfrak{E}\mathfrak{n})} = -(\mathfrak{n}\mathfrak{s})\frac{c^2}{v^2};$$

Wir erhalten also

$$\frac{c^2}{v^2}(\mathfrak{n}\mathfrak{s})^2\mathfrak{E} - \mathfrak{D} + \mathfrak{s}(\mathfrak{D}\mathfrak{s}) = 0.$$

Es ist aber $(\mathfrak{n}\mathfrak{s}) = \cos\zeta$, wo ζ der Winkel zwischen $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{s}$ ist. Nennen wir S die Geschwindigkeit der Welle in Richtung von $\mathfrak{s}$, so ist $\frac{v}{S} = \cos\zeta = (\mathfrak{n}\mathfrak{s})$. Es wird also

$$(2) \qquad \frac{c^2}{S^2}\mathfrak{E} - \mathfrak{D} + \mathfrak{s}(\mathfrak{D}\mathfrak{s}) = 0.$$

Diese Gleichung hat genau denselben Typus wie die ursprüngliche (1).

Die geometrische Lösung ist hier so zu benutzen, daß im Ellipsoid $\mathfrak{r}\mathfrak{A}(\mathfrak{r}) = 1$ und die Fläche $(\mathfrak{r}\mathfrak{s}) = 0$ zu beschreiben ist. Die Halbachsen der Schnittellipse liefern dann $r_1 = \frac{S_1}{c}$; $r_2 = \frac{S_2}{c}$ und ihre Richtungen sind diejenigen von $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$.

Die Fläche mit dem Radiusvektor S in Richtung $\mathfrak{s}$ heißt *Strahlenfläche*.

Schreiben wir $\mathfrak{S} = S\mathfrak{s}$, so wird aus (2)

$$c^2\mathfrak{E} - \mathfrak{D}S^2 + \mathfrak{S}(\mathfrak{D}\mathfrak{S}) = 0.$$

Multiplikation mit $\mathfrak{D}$ und Variation führt wegen $(\mathfrak{D}\delta\mathfrak{E}) = (\mathfrak{E}\delta\mathfrak{D})$ zu

$$2\delta\mathfrak{D}(c^2\mathfrak{E} - \mathfrak{D}S^2 + \mathfrak{S}(\mathfrak{D}\mathfrak{S})) - 2\delta\mathfrak{S}(\mathfrak{S}D^2 - \mathfrak{D}(\mathfrak{D}\mathfrak{S}) = 0.$$

Der Faktor von $\delta\mathfrak{D}$ ist gleich Null, der von $\delta\mathfrak{S}$ ist ein Vektor parallel zu $\mathfrak{n}$.

Also gilt $(\mathfrak{n}\delta\mathfrak{S}) = 0$, d. h. $\mathfrak{n}$ steht senkrecht zur Tangentialebene an die Strahlenfläche im Punkte $r = \mathfrak{S}$, oder die Wellenfläche $(t = 1)$ ist diese Tangentialebene.

Die Strahlenfläche ist daher die Enveloppe aller möglichen Wellenebenen für $t = 1$.

Aus den Gleichungen (1) und (2) lassen sich noch folgende Formeln geringerer Bedeutung ableiten:

$$VS = c^2 \frac{E}{D}; \qquad \mathfrak{S} = \frac{c}{\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{D}}} \frac{\mathfrak{E}(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) - \mathfrak{D}E^2}{\sqrt{(\mathfrak{E}\mathfrak{D})^2 - E^2D^2}}$$

$$S\mathfrak{A}(\mathfrak{n}) - V\mathfrak{A}(\mathfrak{s}) = c^2\left(\frac{\mathfrak{n}}{S} - \frac{\mathfrak{s}}{V}\right)$$

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{n})(\mathfrak{n}S - \mathfrak{s}V) = 0$$

$$H^2 = (\mathfrak{E}\mathfrak{D}).$$

10. Elektrische Maßsysteme.

Das im obigen benutzte Maßsystem heißt das „*Elektrostatische*". Außerdem werden noch folgende benutzt:

Elektromagnetisches Maßsystem. Man setzt:

$$e' = \frac{1}{c}e \qquad \varepsilon' = \varepsilon$$

$$\varrho' = \frac{1}{c}\varrho \qquad \mathfrak{D}' = c\mathfrak{D}$$

$$\mathfrak{E}' = c\mathfrak{E}$$

$$\varphi' = c\varphi$$

$$\mathfrak{i}' = \frac{1}{c}\mathfrak{i} \qquad \mu' = \mu$$

$$\sigma' = \frac{1}{c^2}\sigma \qquad \mathfrak{B}' = \mathfrak{B}$$

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \qquad \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$$

Technisches Maßsystem. (Volt, Ampere, Ohm.)

$$e' = \frac{10e}{c} \text{ (Coulomb)} \qquad \varepsilon' = \varepsilon$$

$$\varrho' = \frac{10\varphi}{c} \qquad \mathfrak{D}' = \mathfrak{D}\cdot 300$$

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E}\cdot 300 \text{ (Volt/cm)}$$

$$\varphi' = \varphi\cdot 300 \text{ (Volt)}$$

$$\mathfrak{i}' = \frac{10\mathfrak{i}}{c} \text{ Ampere/cm}^2 \qquad \mu' = \mu$$

$$\sigma' = \frac{10^{-11}}{9}\sigma$$

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}$$

„Rationelles" Maßsystem. Setzt man

$$e' = e\sqrt{4\pi} \qquad \varepsilon' = \varepsilon$$

$$\varrho' = \varrho\sqrt{4\pi} \qquad \mathfrak{D}' = \frac{\mathfrak{D}}{\sqrt{4\pi}}$$

$$\mathfrak{E}' = -\frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{4\pi}}$$

$$\varphi' = \frac{\varphi}{\sqrt{4\pi}}$$

$$i' = i\sqrt{4\pi} \qquad \mu' = \mu$$

$$\sigma' = \sigma \cdot 4\pi \qquad \mathfrak{B}' = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\mathfrak{B}$$

$$\mathfrak{H}' = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\mathfrak{H} \qquad \mathfrak{A}' = -\sqrt{4\pi}\,\mathfrak{A},$$

so hat man für statische Felder (unter Fortlassung des Index!):

$$\mathfrak{K} = -\frac{e_1 e_2}{4\pi r^3}\mathfrak{r} \qquad \mathfrak{E} = -\int \frac{\varrho\,\mathfrak{r}}{4\pi r^3}\,d\tau \qquad \mathfrak{K} = e\,\mathfrak{E}$$

$$\mathfrak{D} = \varepsilon\,\mathfrak{E} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{D} = \varrho \qquad \mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\varphi \qquad 4\pi\varphi = \int \frac{\varrho}{r}\,dv$$

$$\mathfrak{i} = \operatorname{rot}\mathfrak{H} = \sigma\,\mathfrak{E}$$

$$\mathfrak{B} = \mu\,\mathfrak{H} \qquad U = \tfrac{1}{2}\int dv\,\{(\mathfrak{E}\,\mathfrak{D}) + (\mathfrak{B}\,\mathfrak{H})\}$$

$$\mathfrak{B} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0 \qquad -4\pi\,\mathfrak{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\mathfrak{i}}{r}\,dv,$$

sowie für zeitlich veränderliche Felder

$$\operatorname{rot}\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0$$

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \mathfrak{i} = \sigma\,\mathfrak{E} + \varrho\,\mathfrak{v}$$

$$\mathfrak{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = \operatorname{grad}\varphi; \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\mathfrak{A} = 0 \quad \text{usw.}$$

Literatur.

M. Abraham und *A. Föppl*: Theorie der Elektrizität (Leipzig: B. G. Teubner).

Dreizehnter Abschnitt.

Relativitätstheorie.

A. Grundbegriffe.

1. Maßsysteme.

Die analytische Darstellung eines physikalischen Gesetzes oder einer physikalischen Tatsache (Beobachtungs- bzw. Meßergebnisses) muß sich notwendigerweise beschränken auf die Festlegung einer *Relation zwischen gemessenen* (oder wenigstens prinzipiell meßbaren) *Zahlen*.

Diese Zahlen heißen *Maßzahlen*. Um sie zu gewinnen, muß durch irgendeine Festsetzung ein System von *Maßeinheiten* festgelegt werden. Das Produkt einer Maßzahl und ihrer Einheit liefert dann die Größe selbst.

Die Zahl der erforderlichen Maßeinheiten ist zunächst so groß wie die Zahl der verschiedenen zu messenden Größen. Durch an sich willkürliche *Meßvorschriften* lassen sie sich auf eine kleinere Zahl zurückführen. Üblich und rationell ist die Zurückführung auf die leicht realisierbaren Einheiten der *Länge, Masse und Zeit*.

Das CGS-*System* benutzt

die Länge $1\ \mathrm{cm} = 10^{-9}$ Erdquadrant,
die Masse $1\ \mathrm{g} = 1\ \mathrm{cm}^3$ Wasser bei 4^0 C[1]),
die Zeit $1\ \mathrm{sec} = {}^1/_{86400}$ Sonnentag.

Andere Maßsysteme, begründet auf andere Maßeinheiten, bestehen daneben.

Anmerkung. Die wünschenswerte Unveränderlichkeit der Maßeinheiten ist teils unkontrollierbar, teils nur wahrscheinlich gemacht durch die mit ihrer Hilfe feststellbaren Unveränderlichkeit eines Naturgesetzes. Frei macht man sich von allen hier möglichen Bedenken nur in der *Relativitätstheorie*.

---

[1]) Diese ursprüngliche Festsetzung wurde später ersetzt durch die Definition:

$1\ \mathrm{cm} = {}^1/_{100}$ des Pariser Normalmeters,
$1\ \mathrm{g} = {}^1/_{1000}$ des Pariser Normalkilogramms.

2. Dimensionen.

Jede physikalische Gleichung muß eine Bedeutung haben, die unabhängig ist von dem an sich willkürlichen speziellen Maßsystem. Sie muß also kovariant sein gegenüber Maßeinheitsänderungen.

Ist die Maßeinheit einer physikalischen Größe G festgelegt durch die Einheiten der Länge, Masse und Zeit, so ändert sie sich, wenn man zu der l-fachen Längeneinheit, der m-fachen Masseneinheit und der t-fachen Zeiteinheit übergeht um den Faktor $l^\alpha m^\beta t^\gamma$. Die drei für die physikalische Größe charakteristischen Zahlen α, β, γ repräsentieren die „Dimension" von G. Man schreibt dies in der Form

$$[G] = l^\alpha m^\beta t^\gamma.$$

Die Dimension des Produktes zweier Größen ist gleich dem Produkt ihrer Dimensionen.

Die geforderte Kovarianz gegen Maßeinheitsänderungen kann nur bestehen, falls die Dimensionen der beiden Seiten einer Gleichung dieselben sind.

Da die *Maßeinheit* um den Faktor $[G]$ wächst, wird die *Maßzahl*, d. h. die in der Gleichung durch einen Buchstaben symbolisch geschriebene Zahl, um den Faktor $\frac{1}{[G]}$ verkleinert.

B. Vierdimensionale Darstellung der Welt und Relativitätsprinzip.

1. Jedes physikalische „*Ereignis*" findet an einem Ort zu einer Zeit statt, liefert also ein Wertessystem $xyzt$. Hier bedeuten xyz die Cartesischen Koordinaten des (3-dimensionalen) Raumes, gemessen mit *materiellen* Maßstäben, bezogen auf ein beliebig angenommenes Achsensystem und t die Maßzahl der Zeit, gemessen mit relativ zu dem System ruhenden *materiellen* Uhren.

Die Unveränderlichkeit der Maßstäbe bei den zur Ausmessung vorgenommenen Verschiebungen oder Drehungen gegen das System wird hierbei immer angenommen. Als Kontrolle des gleichen Ganges der Uhren (Definition der Gleichzeitigkeit) werden Lichtsignale als benutzt gedacht, wobei die Lichtgeschwindigkeit unter allen Umständen als im Vakuum konstant $= c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec angenommen wird.

2. Zur geometrischen Darstellung des gesamten zeitlich-räumlichen physikalischen Geschehens kann man sich einer 4-dimensionalen Mannigfaltigkeit (*Welt*) bedienen. In dieser sei jeder Punkt durch die 4 Koordinatenmaßzahlen $x^1 x^2 x^3 x^4$ in einem Cartesischen 4-dimensionalem System festgelegt.

Ein Wertsystem $x^1 x^2 x^3 x^4$ heißt ein *Weltpunkt*. Die Abhängigkeit der Lage eines materiellen Punktes im Raum xyz von der Zeit t wird durch eine *Weltlinie* dargestellt. Durch die Gesamtheit der Weltlinien aller Punkte ist das gesamte (meßbare) Naturgeschehen darstellbar.

Es sind dann folgende zwei Darstellungen gebräuchlich:

a) Man identifiziert mit $x^1 x^2 x^3 x^4$ die Größen x, y, z, t.

b) Man identifiziert mit $x^1 x^2 x^3 x^4$ die Größen $x, y, z, l = ict$ $(i = \sqrt{-1})$. Ein Wertesystem $xyzt$ ist dann ein imaginärer Punkt der Welt. Diese Darstellung bietet gewisse mathematische Vorteile. Sie ist aber unanschaulich. Im folgenden gebrauchen wir die Darstellung 1.

3. Nimmt man ein gegen das System xyz gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegtes anderes Koordinatensystem und mißt wie oben, d. h. mit gegen dieses ruhenden Maßstäben und Uhren, die Koordinaten und die Zeit desselben Ereignisses, so erhält man ein Wertesystem $x'y'z't'$, das an Stelle der $xyzt$ mit den $x^1 x^2 x^3 x^4$ identifiziert werden kann.

Die spezielle *Relativitätstheorie* sagt dann aus, daß *die Naturgesetze, dargestellt in den $x^1 x^2 x^3 x^4$ gleichlauten, unabhängig davon,* ob man diese mit den $xyzt$ oder den $x'y'z't'$ identifiziert. (Es ist zu beachten, daß wir unter den Naturgesetzen die Relationen verstehen, die zwischen den durch Messung mit Maßstäben und Uhren gewonnenen Maßzahlen der physikalischen Größen bestehen. Wenn sich also auch bei der relativen Bewegung der Systeme die Maßeinheiten ändern mögen [was nicht kontrollierbar ist], so sollen die Relationen zwischen den gewonnenen Zahlen erhalten bleiben.)

C. Lorentztransformation.

4. Die Anwendung des Relativitätspostulats (z. B. auf die Kinematik der Lichtausbreitung) führt auf folgende Beziehungen (*Lorentz-Transformation*), wenn man die Koordinaten x, y, z als Komponenten des Ortsvektors $\mathfrak{r}$ nimmt

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} - \mathfrak{v}\left(\frac{(\mathfrak{r}\mathfrak{v})}{v^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) + \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}}\right); \quad t' = \frac{t - \frac{(\mathfrak{v}\mathfrak{r})}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

5. Das vollständige Transformationschema lautet also:

	x	y	z	t
x'	$1 - \frac{v_x^2}{v^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$	$\frac{-v_x v_y}{v^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$	$\frac{-v_x v_z}{v^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{}}\right)$	$\frac{-v_x}{\sqrt{1-\beta^2}}$
y'	$\frac{-v_x v_y}{v^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$	$1 - \frac{v_y^2}{v^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{}}\right)$	$\frac{-v_y v_z}{v^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{}}\right)$	$\frac{-v_y}{\sqrt{1-\beta^2}}$
z'	$\frac{-v_x v_z}{v^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{}}\right)$	$\frac{-v_y v_z}{v^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{}}\right)$	$1 - \frac{v_z^2}{v^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{}}\right)$	$\frac{-v_z}{\sqrt{1-\beta^2}}$
t'	$\frac{-v_x}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}$	$\frac{-v_y}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}$	$\frac{-v_z}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Hieraus folgt für $v_y = v_z = 0$; $v_x = v$ das der speziellen *Lorentz*-Transformation:

	x	y	z	t
x'	$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$	0	0	$\frac{-v}{\sqrt{1-\beta^2}}$
y'	0	1	0	0
z'	0	0	1	0
t'	$\frac{-v}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}$	0	0	$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Die Transformation hat die Determinante 1.

6. Hieraus folgt, daß der 4-dimensionale „*Abstand*" zweier Weltpunkte $x_1\, y_1\, z_1\, t_1$ und $x_2\, y_2\, z_2\, t_2$

$$\Delta s = \sqrt{-(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 + c^2(t_1 - t_2)^2}$$
$$= \sqrt{-(\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)^2 + c^2(t_1 - t_2)^2}$$

eine Invariante ist, d. h. unverändert bleibt, wenn man ihn durch die $x'\, y'\, z'\, t'$ in derselben Form schreibt:

$$\Delta s = \sqrt{-x_1' - x_2')^2 - (y_1' - y_2)^2 - (z_1' - z_2')^2 + c^2(t_1' - t_2')^2}$$
$$= \sqrt{-(\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)^2 + c^2(t_1' - t_2)^2}.$$

Ist also für ein bestimmtes System $x\,y\,z\,t$ das Weltbild (dargestellt durch die Weltlinien) bekannt, so erhält man das Weltbild für ein anderes System $x'\, y'\, z'\, t'$ durch eine Deformation (Transformation), die den „Abstand" Δs aller Weltpunkte unverändert läßt.[1])

7. Ist Δs imaginär, so ist es durch eine *Lorentz*-Transformation immer möglich, $t_1' - t_2'$ verschwinden zu lassen. Die beiden Ereignisse erscheinen im geeigneten Bezugsystem als *gleichzeitig*. (*Transformation auf Gleichzeitigkeit.*)

Ist Δs reell, so ist es möglich, Δs auf die Form $\sqrt{c^2(t_1' - t_2)}$ zu transformieren. Die Ereignisse erscheinen als am selben Ort stattfindend (*Transformation auf Ruhe*).

Ist $\Delta s = 0$, so sind die beiden Ereignisse durch eine Raumdistanz Δr und eine Zeitdistanz Δt so getrennt, daß $\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\Delta r'}{\Delta t'} = c$ ist.

Sind die beiden Weltpunkte 1 und 2 zwei infinitesimal benachbarte Punkte der Weltlinie eines bewegten Punktes, so ist ds immer reell; für den Fall der Lichtgeschwindigkeit des Punktes wird $ds = 0$.

1) Führt man an Stelle von t die Größe $l = ict$ und $l' = ict'$ ein, so wird die Transformation orthogonal (Drehung).

$d\tau = \frac{1}{c} ds$ heißt das Differential der „*Eigenzeit*" des Punktes. Ist der Punkt auf Ruhe transformiert, so ist $d\tau = dt'$.

8. Die *Lorentz*-Transformation angewandt auf einen mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ relativ zum 1. System bewegten Punkt liefert die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}'$ relativ zum 2. System.

Es ist
$$\mathfrak{w} = \frac{d\mathfrak{x}}{dt},$$
also
$$\mathfrak{w}' = \frac{d\mathfrak{x}'}{dt'} = \frac{\mathfrak{w}\sqrt{1-\beta^2} - \mathfrak{v}\left\{\frac{(\mathfrak{w}\mathfrak{v})}{v^2}\left(\sqrt{1-\beta^2}-1\right)+1\right\}}{1-\frac{(\mathfrak{w}\mathfrak{v})}{c^2}}.$$

Ist speziell $\mathfrak{w} \parallel \mathfrak{v}$, so wird:
$$\mathfrak{w}' = \mathfrak{v}\,\frac{\left(\frac{w}{v}-1\right)}{1-\frac{wv}{c^2}} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{w}' = \frac{\mathfrak{w}-\mathfrak{v}}{1-\frac{wv}{c^2}}$$
(*Additionstheorem der Geschwindigkeiten*).

Ist $\mathfrak{w} \perp \mathfrak{v}$, so wird:
$$\mathfrak{w}' = \mathfrak{w}\sqrt{1-\beta^2} - \mathfrak{v} \quad \text{oder} \quad w'^2 = w^2 + v^2 - \frac{v^2 w^2}{c^2}.$$

Anwendung. In einer mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ strömenden Flüssigkeit laufe ein Lichtstrahl mit der Geschwindigkeit $w' = \frac{c}{n}$ (n = Brechungsexponent) in der Richtung der Bewegung. Dann ist seine Geschwindigkeit im ruhenden System
$$w = \frac{\frac{c}{n}+v}{1+\frac{v}{n\cdot c}} = \left(\frac{c}{n}+v\right)\left(1-\frac{v}{nc}+\dots\right)$$
$$= v + \frac{c}{n} - \frac{v^2}{nc} - \frac{v}{n^2} + \dots$$
$$w = \frac{c}{n} + v\left(1-\frac{1}{n^2}\right) + \dots$$
$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ heißt *Mitführungskoeffizient*.

9. Statt (nach 6) die *Lorentz*-Transformation als eine Deformation des Weltbildes zur Darstellung in einem anderen Koordinatensystem aufzufassen, kann man sie auch (vgl. S. 76) als eine Transformation der Koordinaten des (unverändert gelassenen) Weltbildes betrachten. Wir haben dann eine affine Transformation des Koordinatensystems, bei der das Linienelement ds invariant ist. Zur Darstellung der Naturgesetze bedient man sich dann mit Vorteil der 4-dimensionalen Vektoranalysis im Weltbild. Die Komponenten p^i eines Vektors $\mathfrak{p}$ transformieren sich dann wie die Koordinaten x^i; $p'^i = \sum a_k^i p^k$, wo die

a_k^i aus dem Schema 5 zu entnehmen sind. Tensoren transformieren sich nach der Regel:

$$T'^{lm} = \sum_l \sum_m a_i^l a_k^m T^{ik} \text{ (vgl. S. 174).}$$

Wegen

$$ds^2 = g_{ik}\,dx^i dx^k = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt$$

wird

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1;\quad g_{44} = c^2;\quad g_{ik} = 0 \text{ für } i \neq k \qquad |g| = -c^2.$$

Die obigen Werte für g_{ik} gelten für alle Bezugsysteme.

Folgende Beziehungen gelten daher zwischen den kovarianten und kontravarianten Komponenten von Vektoren aus Tensoren

$$\begin{aligned} p_i &= -p^i \text{ für } i = 1, 2, 3 \\ p_4 &= c^2 p^4 \\ T_{ik} &= T^{ik} \text{ für } i = 1, 2, 3;\ k = 1, 2, 3 \\ T_{i4} &= -c^2 T^{i4} \text{ für } i = 1, 2, 3 \\ T_{44} &= c^4 T^{44} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} T_k^i &= -T^{ik} \\ T_4^i &= c^2 T^{i4} \\ T_i^4 &= -T^{4i} \\ T_4^4 &= c^2 T^{44}. \end{aligned}$$

Das Transformationsschema für die Komponenten eines Tensors wird also bei der speziellen *Lorentz*-Transformation ($v_y = v_z = 0$; $v_x = v$):

	11	12	13	14	21	22	23	24	31	32	33	34	41	42	43	44
11	$\frac{c^2}{c^2-v^2}$	0	0	$\frac{-vc^2}{c^2-v^2}$									$\frac{-vc^2}{c^2-v^2}$	0	0	$\frac{+v^2c^2}{c^2-v^2}$
12	0	$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$	0	0		0				0			0	$\frac{-v}{\sqrt{}}$	0	0
13	0	0	$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$	0									0	0	$\frac{-v}{\sqrt{}}$	0
14	$\frac{-v}{c^2-v^2}$	0	0	$\frac{c^2}{c^2-v^2}$									$\frac{v^2}{c^2-v^2}$	0	0	$\frac{-v^2c^2}{c^2-v^2}$
21					$\frac{1}{\sqrt{}}$	0	0	$\frac{-v}{\sqrt{}}$								
22		0			0	1	0	0		0				0		
23					0	0	1	0								
24					$\frac{-v}{c^2\sqrt{}}$	0	0	$\frac{1}{\sqrt{}}$								

	11	12	13	14	21	22	23	24	31	32	33	34	41	42	43	44
31									$\frac{1}{\sqrt{\ }}$	0	0	$\frac{-v}{\sqrt{\ }}$				
32		0				0			0	1	0	0		0		
33									0	0	1	0				
34									$\frac{-v}{c^2\sqrt{\ }}$	0	0	$\frac{1}{\sqrt{\ }}$				
41	$\frac{-v}{c^2-v^2}$	0	0	$\frac{v^2}{c^2-v^2}$									$\frac{c^2}{c^2-v^2}$	0	0	$\frac{-v^2}{1-\beta^2}$
42	0	$\frac{-v}{c^2\sqrt{\ }}$	0	0		0				0			0	$\frac{1}{\sqrt{\ }}$	0	0
43	0	0	$\frac{-v}{c^2\sqrt{\ }}$	0									0	0	$\frac{1}{\sqrt{\ }}$	0
44	$\frac{v^2}{c^2(c^2-v^2)}$	0	0	$\frac{-v}{c^2-v^2}$									$\frac{-v}{c^2-v^2}$	0	0	$\frac{c^2}{c^2-v^2}$

und daraus für einen antisymmetrischen Tensor:

	14	24	34	23	31	12
14	1	0	0	0	0	0
24	0	$\frac{1}{\sqrt{\ }}$	0	0	0	$\frac{+v}{c^2\sqrt{\ }}$
34	0	0	$\frac{1}{\sqrt{\ }}$	0	$\frac{-v}{c^2\sqrt{\ }}$	0
23	0	0	0	1	0	0
31	0	0	$\frac{-v}{\sqrt{\ }}$	0	$\frac{1}{\sqrt{\ }}$	0
12	0	$\frac{+v}{\sqrt{\ }}$	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{\ }}$

D. Physikalische Bedeutung vierdimensionaler Vektoren und Tensoren.

Die Komponenten eines Vektors p^i lassen sich physikalischen (meßbaren) Größen zuordnen.

Die drei ersten Komponenten sind die Komponenten eines räumlichen Vektors $\frac{\mathfrak{v}}{c\sqrt{1-\beta^2}}$, die vierte hat eine abweichende Bedeutung. Sie ist durch die Dimension einer Geschwindigkeit von den andern unterschieden. Sie kann nur einen Skalar bedeuten. Der Betrag des Vektors $p = \sqrt{p^i p^k g_{ik}}$ muß eine Invariante sein, also eine Größe, die für alle Bezugssysteme denselben Wert hat.

Die Aufstellung der Vektorgleichungen der Relativitätstheorie muß im Anschluß an die Erfahrung erfolgen. Sie ist in vielen Fällen nicht ohne Modifikation der älteren Anschauungen durchzuführen.

Der Einheitsvektor in Richtung einer Weltlinie $u^i = \frac{dx^i}{ds}$ hat die Komponenten

$$u^1 = \frac{v_x}{c\sqrt{1-\beta^2}}; \quad u^2 = \frac{v_y}{c\sqrt{1-\beta^2}}; \quad u^3 = \frac{v_z}{c\sqrt{1-\beta^2}}; \quad u^4 = \frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Folgende Vektoren und ihre räumlich-zeitliche Deutung haben sich bewährt:

Weltvektor	Räumlicher Anteil	Zeitlicher Anteil	Invarianter Betrag
u^i	$\frac{\mathfrak{v}}{c\sqrt{1-\beta^2}}$	$\frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}}$	1
s^i	$\mathfrak{i}$ = Stromdichte	ϱ Ladungsdichte	$\sqrt{c^2\varrho^2 - i^2}$
φ^i	$\mathfrak{a}$ = Vektorpotential	$\frac{\varphi}{c} = \frac{\text{Skalar-Potential}}{c}$	$c\sqrt{\varphi^2 - a^2}$
p^i	$\mathfrak{p}$ = Kraftdichte	$\frac{\lambda}{c^2} = \frac{\text{Leistungsdichte}}{c^2}$	$\sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2} - p^2}$

In analoger Weise sind die Komponenten eines Tensors zu deuten. Folgende Tensoren und ihre Bedeutungen werden benutzt,

wobei $\mathfrak{E}$ = elektrische Feldstärke
$\mathfrak{H}$ = magnetische Feldstärke
$\mathfrak{D}$ = elektrische Verschiebung
$\mathfrak{B}$ = magnetische Induktion bedeutet.

$F^{ik} = -F^{ki}$

$k \backslash i$	1	2	3	4
1	0	B_z	$-B_y$	$-\frac{E_x}{c}$
2	$-B_z$	0	B_x	$-\frac{E_y}{c}$
3	B_y	$-B_x$	0	$-\frac{E_z}{c}$
4	$\frac{E_x}{c}$	$\frac{E_y}{c}$	$\frac{E_z}{c}$	0

$$(F^2) = F^{ik}F_{ik} = 2(B^2 - E^2)$$

$H^{ik} = -H^{ki}$

$k \backslash i$	1	2	3	4
1	0	H_z	$-H_y$	$-\frac{D_x}{c}$
2	$-H_z$	0	H_x	$-\frac{D_y}{c}$
3	H_y	$-H_x$	0	$-\frac{D_z}{c}$
4	$\frac{D_x}{c}$	$\frac{D_y}{c}$	$\frac{D_z}{c}$	0

$$(H^2) = H^{ik}H_{ik} = 2(H^2 - D^2)$$

$$(FH) = F^{ir}H^{kl}g_{ik}g_{rl} = 2((\mathfrak{B}\mathfrak{H}) - (\mathfrak{E}\mathfrak{D}))$$

$$S^{ik} = \frac{g^{ik}}{4}(FH) - \tfrac{1}{2}\left(F^{i\nu}H^{kl} + F^{k\nu}H^{il}\right)g_{\nu l};$$

$$S^{11} = \tfrac{1}{2}\left(E_y D_y + E_z D_z - E_x D_x + H_y B_y + H_z B_z - H_x B_x\right)$$

$$S^{12} = -E_x D_y - H_x B_y \quad \text{usw.}$$

$$S^{14} = \frac{1}{2c}\left([\mathfrak{D}\,\mathfrak{B}] + [\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}]\right)_x$$

$$S^{44} = \frac{1}{2c^2}\left((\mathfrak{E}\,\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\,\mathfrak{B})\right).$$

S^{ik} für $i = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, 3$ sind also die Komponenten des *symmetrischen Maxwellschen Spannungstensors* ($\mathfrak{S}$). $\frac{c^2}{4\pi}S^{4i}$ sind die i Komponenten des *Poyntingschen Vektors.* $\frac{c^2}{4\pi}S^{44}$ ist die *Energiedichte* W.

E. Elektrodynamik.

Die elektrodynamischen Gesetze stellen sich dann folgendermaßen dar:

(1) $$\frac{\partial s^i}{\partial x^i} = 0, \qquad \left(\operatorname{div}\mathfrak{i} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0\right)$$

(2) $$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} = -F_{ik} \qquad \left(\mathfrak{B} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}\right),$$

wobei für φ^i gelten soll

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^i} = 0, \qquad \left(\operatorname{div}\mathfrak{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0\right).$$

(3) $$\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} = 0 \qquad \left(\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\right)$$

(4) $$p^i = \frac{F^{ik}s_k}{c} \qquad (\mathfrak{p} = \varrho\,\mathfrak{E} + [\mathfrak{i}\,\mathfrak{B}]; \quad \lambda = (\mathfrak{E}\,\mathfrak{i}))$$

(5) $$\frac{\partial H^{ik}}{\partial x^k} = \frac{4\pi s^i}{c} \qquad \left(\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \frac{4\pi\mathfrak{i}}{c} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}; \quad \operatorname{div}\mathfrak{D} = 4\pi\varrho\right)$$

(6) $$p^i = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial S^{ik}}{\partial x^k} \qquad \left(\mathfrak{p} = \operatorname{div}\mathfrak{S} + \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathfrak{D}\,\mathfrak{B}];\right.$$

$$\left.\lambda = -\frac{c}{4\pi}\operatorname{div}[\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}] - \frac{\partial W}{\partial t}\right).$$

Im Vakuum ist $F^{ik} = H^{ik}$.

Für $F^{ik} = H^{ik}$ kann man aus den Formeln (2) und (5) F^{ik} eliminieren und findet:

$$\frac{4\pi s^i}{c} = -\Box\varphi^i,$$

wo

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

bedeutet.

Setzt man

$$\varphi^i = \frac{\partial Z^{ik}}{\partial x^k} \quad \text{und} \quad s^i = \frac{\partial Q^{ik}}{\partial x^k} \quad (Z^{ik} = -Z^{ki},\ Q^{ik} = -Q^{ki})$$

so findet man

$$\frac{4\pi Q^{ik}}{c} = -\Box Z^{ik}.$$

Z^{ik} entspricht dem *Hertz*schen Vektor $\mathfrak{Z}$.

Diese Gleichung läßt sich in affinen Koordinatensystemen leicht integrieren.

F. Elektrodynamik in (bewegten) Medien.

Die allgemeine Beziehung zwischen F^{ik} und H^{ik} muß so sein, daß für ein relativ zur Materie ruhendes Bezugssystem $\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}$; $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$ wird. Hier gilt außerdem $\mathfrak{i} = \sigma\mathfrak{E}$.

Um diese Beziehungen kovariant auszudrücken, bildet man eine Reihe von neuen Vektoren und Tensoren.

(1) $$e^i = F^{ik} u_k,$$

wo u^k der Einheitsvektor $\frac{dx^k}{ds}$ in Richtung der Weltlinie der Materie ist.

(2) $$d^i = H^{ik} u_k.$$

Für ein Bezugsystem, in dem die Materie ruht, ist dann

$$u^1 = u^2 = u^3 = 0; \quad u^4 = \frac{1}{c}.$$

Hier wird

$$e^i = cF^{i4},$$

also

$$e^1 = E_x,\quad e^2 = E_y,\quad e^3 = E_z,\quad e^4 = 0$$

und

$$d^1 = D_x,\quad d^2 = D_y,\quad d^3 = D_z,\quad d^4 = 0.$$

Die kovariante Gleichung $d^i = \varepsilon e^i$ gilt also im geeigneten Bezugssystem und daher allgemein. Es ist also:

$$\mathfrak{D} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}] = \varepsilon\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]\right).$$

Wir bilden ferner:

(3) $$b^{ikl} = F^{ik} u^l + F^{kl} u^i + F^{li} u^k, \quad \text{wo} \quad i \neq l \neq k.$$

Für
$$u^1 = u^2 = u^3 = 0; \quad u^4 = \frac{1}{c}$$
wird
$$b^{234} = -\frac{B_x}{c}; \quad b^{341} = \frac{B_y}{c}; \quad b^{412} = \frac{B_z}{c}, \quad b^{123} = 0 \quad \text{usw.}$$

(4) $$h^{ikl} = H^{ik} u^l + H^{kl} u^i + H^{li} u^k.$$

Die kovariante Gleichung $b^{ikl} = \mu h^{ikl}$ liefert:
$$\mathfrak{B} - \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{E}] = \mu\left(\mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{D}]\right).$$

$\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]$ heißt *elektromotorische Kraft*,

$\mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{D}]$ heißt *magnetomotorische Kraft*.

Um die Beziehung $\mathfrak{i} = \sigma\mathfrak{E}$ kovariant darzustellen, beachte man, daß s^i in Richtung der Weltlinie die Komponente $u^i(s^k u_k)$ hat. Dies ist der *Konvektionsstrom* der geladenen Materie. Die obige Gleichung bezieht sich aber nur auf den *Leitungsstrom*, also auf
$$l^i = s^i - u^i(s^k u_k).$$

Für $u^1 = u^2 = u^3 = 0; \quad u^4 = \frac{1}{c}$ wird
$$l^1 = i_x; \quad l^2 = i_y; \quad l^3 = i_z; \quad l^4 = \varrho - \frac{1}{c}(\varrho c) = 0.$$

Wir haben hier wegen $\varrho = 0$ einen reinen Leitungsstrom in ungeladener Materie.

Im ruhenden System und daher allgemein gilt also
$$l^i = s^i - u^i(s^k u_k) = \sigma e^i,$$
d. h.
$$\mathfrak{i} + \frac{\mathfrak{v}\left((\mathfrak{v}\mathfrak{i}) - \varrho c^2\right)}{c^2 - v^2} = \frac{\sigma\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Für einen reinen Konvektionsstrom
$$\mathfrak{i} = \varrho\mathfrak{v}, \quad k^i = u^i(s^k u_k) = u^i \varrho_0 \cdot c$$
wird
$$k^1 = \frac{v_x\left(\varrho c^2 - (\mathfrak{i}\mathfrak{v})\right)}{c^2 - v^2} = v_x \cdot \varrho = u^1 \cdot c \cdot \varrho_0,$$
$$k^4 = \varrho,$$
so daß
$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad \varrho_0 \text{ heißt Ruhdichte der Ladung.}$$
$$p^i = c\varrho_0 F^{ik} u_k \quad \text{liefert} \quad \mathfrak{p} = \varrho(\mathfrak{E} + [\mathfrak{v}\mathfrak{B}]).$$

G. Dynamik der Masse.

Das Grundgesetz der Mechanik $\frac{\mu\, d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{p}$ definiert (für kleines $\mathfrak{v}$) die Massendichte μ.

Die entsprechende kovariante Form kann nur lauten

$$(1) \qquad c^2 \mu_0 \frac{du^k}{ds} = p^k,$$

wo μ_0 die Dichte für $\mathfrak{v} = 0$ bedeutet. Integriert über den Bereich

$$dV = dx^1\, dx^2\, dx^3$$

ergibt

$$(2) \qquad c^2 \mu_0 \int \frac{du^k}{ds} dV = \int p^k dV = P^k.$$

Nun ist $dV = dV_0 \sqrt{1-\beta^2}$, wo V_0 das Volumen, im mitbewegten Bezugssystem gemessen, bedeutet. Setzen wir

$$(3) \qquad m_0 = \int \mu_0\, dV_0 \quad (\textit{Ruhmasse}),$$

so wird

$$(2') \qquad P^k = c^2 m_0 \cdot \sqrt{1-\beta^2} \frac{du^k}{ds} = c m_0 \cdot \frac{du^k}{dt},$$

also lautet die von der Relativitätstheorie geforderte Bewegungsgleichung:

$$(4) \qquad m_0 \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \mathfrak{P}.$$

Setzen wir

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{b} \text{ (Beschleunigung)}, \qquad \frac{d(v^2)}{dt} = 2(\mathfrak{v}\mathfrak{b}),$$

so wird

$$\mathfrak{P} = m_0 \cdot \left(\frac{\mathfrak{b}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\mathfrak{v}(\mathfrak{v}\mathfrak{b})}{c^2\sqrt{1-\beta^2}^3}\right),$$

also für $\mathfrak{b} \parallel \mathfrak{v}$

$$(5) \qquad \mathfrak{P} = \frac{m_0 \cdot \mathfrak{b}}{\sqrt{1-\beta^2}^3}, \qquad \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}^3} = \textit{longitudinale Masse}$$

und für $\mathfrak{b} \perp v$

$$(6) \qquad \mathfrak{P} = \frac{m_0 \cdot \mathfrak{b}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \textit{transversale Masse}.$$

Der *Impuls* wird also $= \frac{m_0 \mathfrak{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$, die *Energie* $E = \frac{c^2 m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$; dieses entwickelt, liefert

$$(7) \qquad E = m_0 c^2 + \frac{m_0}{2} v^2 + \cdots$$

Das zweite Glied ist die kinetische Energie.

Für $v = 0$ folgt $m_0 = \frac{E_0}{c^2}$. Dies kann so gedeutet werden, daß *die Masse m_0 energetischen Ursprungs ist* (doch ist zu beachten, daß noch eine eventuelle Integrationskonstante hinzugefügt werden kann).

Führt man den Tensor $K^{ik} = c^2 \mu_0 u^i u^k$ ein, so wird wegen

(8) $\frac{\partial(\mu_0 u^k)}{\partial x^k} = 0$ (Kontinuitätsgleichung der Materie).

$$p^i = \frac{\partial K^{ik}}{\partial x^k}; \quad K^{ik} \text{ heißt „\textit{kinetischer Impuls-Energietensor}"}.$$

Analog der Elektrodynamik lassen sich (wie in der Elektrizitätstheorie) die Kräfte in der Materie durch einen Spannungstensor P^{ik} darstellen.

$$p^i = -\frac{\partial P^{ik}}{\partial x^k}; \quad P^{ik} \text{ heißt „\textit{potentieller Impuls-Energietensor}"}.$$

Für ein abgeschlossenes System gilt dann:

(9) $$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}(K^{ik} + P^{ik}) = 0.$$

Hierin sind die Erhaltungssätze des Impulses und der Energie ausgedrückt.

T^{ik} heißt der „*gesamte Impuls-Energietensor*".

H. Allgemeine Relativitätstheorie.

1. Die spezielle Relativitätstheorie hat die Forderung aufgestellt, daß alle Naturgesetze Beziehungen darstellen sollen zwischen Skalaren, Vektoren oder Tensoren einer vierdimensionalen ***euklidischen*** Mannigfaltigkeit, deren Linienelement also immer auf die Form:

$$ds^2 = c^2(dx^4)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

gebracht werden kann. Die Grundgesetze der Physik bleiben dann kovariant gegenüber allen Lorentztransformationen.

Gehen wir aus von einer ***nichteuklidischen*** Mannigfaltigkeit, so müssen wir die allgemeine Form

(1) $$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k$$

zugrunde legen. Die Tensorgleichungen erscheinen dann in einer Form, die ***beliebigen Transformationen*** der Koordinaten x^i gegenüber kovariant bleibt. Es treten jetzt in diesen Gleichungen auch die g_{ik}-Komponenten des „***metrischen Fundamentaltensors***" als Funktionen des Ortes auf. Im Gegensatz zur speziellen Theorie betrachtet die allgemeine Relativitätstheorie die Ortsabhängigkeit des Fundamentaltensors als wesentliches Bestimmungsstück des physikalischen Feldes. Das Linienelement kann dann wohl noch in jedem Punkte auf die ***Minkowskische*** Form gebracht werden, nicht aber in endlichen Bereichen.

Die nächstliegende differentialgeometrische Charakterisierung des Linienelements kann durch den verjüngten *Riemannschen* Krümmungstensor R_{ik} (vgl. S. 176) gegeben werden. In einer euklidischen Mannigfaltigkeit verschwindet derselbe identisch im ganzen Gebiet. *Einstein* stellt die Theorie auf, daß R_{ik} nur an solchen Stellen verschwindet, wo keine Materie vorhanden ist, während es im übrigen durch den gesamten Spannungs-Energietensor der Materie bestimmt wird. Der Zusammenhang wird geregelt durch die Erhaltungssätze von Impuls und Energie. Die Dynamik lieferte als oberstes Grundgesetz, daß *die Divergenz des Welttensors* $\mathfrak{T}$ *der Materie* (Summe des mechanischen und elektromagnetischen Anteiles) *verschwindet*:

(2) $$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}\, T_i^s}{\partial x^s} - \begin{Bmatrix} i\,s \\ r \end{Bmatrix} T_r^s = 0\,.$$

Auch aus dem Krümmungstensor läßt sich ein Tensor bilden, dessen Divergenz identisch verschwindet, nämlich:

(3) $$R_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} R\,.$$

Die *Einsteinsche* Theorie macht nun den Ansatz:

(4) $$R_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} R = \varkappa T_{ik}\,,$$

wo $\varkappa$ eine universelle Konstante ist. Die Diskussion dieser Gleichung führt zu Konsequenzen, die mit den Gravitationserscheinungen im Einklang sind, wenn man

(5) $$\varkappa = \frac{8\pi f}{c^2} = 1{,}87 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{cm/g}$$

setzt, wo f die Gravitationskonstante bedeutet. Der Impuls-Energiesatz ist jetzt eine notwendige Folge der Feldgleichungen.

2. Infolge des außerordentlich kleinen Wertes von $\varkappa$ werden die praktisch vorkommenden Abweichungen vom *Minkowskischen* Linienelement selbst bei großen Massen äußerst gering. Man kann sich daher (wenn nicht geradezu interstellare Räume in Frage kommen) auf *unendlich schwache Felder* beschränken, d. h. man setzt:

(6) $$g_{ik} = \delta_{ik} + \varkappa \gamma_{ik} \qquad \left(\delta_{ik} \begin{matrix} = 1\,, & \text{wenn } i = k \\ = 0\,, & \text{,, } \ i \neq k \end{matrix}\right)$$

und vernachlässigt die Potenzen von $\varkappa$. (Als x^4 ist jetzt $l = ict$ angenommen.)

Die Krümmungskomponenten drücken sich dann in einer besonders einfachen Form aus, insbesondere, wenn man (was immer möglich ist) ein Koordinatensystem zugrunde legt, in dem

(7) $$\frac{\partial \gamma_i^s}{\partial x^s} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_s^s}{\partial x^i} = 0$$

ist. Es wird dann:

(8) $$R_{ik} = \frac{\varkappa}{2} \Box \gamma_{ik}$$

und die Feldgleichungen geben:

(9) $$\tfrac{1}{2} \Box \gamma_{ik} = T_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} T. \qquad (T = T_s^s)$$

Die allgemeinen Gleichungen sind *nichtlinearer Art* und können durch sukzessive Approximationen integriert werden.

3. Die Abweichung der Weltmetrik von der Euklidizität macht sich in den *Gravitationserscheinungen* bemerkbar. Die Bewegung eines Massenpunktes in einem Gravitationsfelde ist nach der *Einsteinschen* Theorie eine *kräftefreie Bewegung*, d. h. infolge des Trägheitsgesetzes ist die Weltlinie eines freien Massenpunktes eine *geodätische Linie*:

(10) $$p^i = m_0 \left(\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} rs \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx^r}{ds} \frac{dx^s}{ds} \right) = 0.$$

Die infolge der Klammerausdrücke auftretenden Zusatzglieder können als „*Scheinkraft*" gedeutet werden, nach Art der Zentrifugal- und Korioliskräfte, die ebenfalls dadurch zustande kommen, daß in einem rotierenden Bezugssystem auch bei der euklidischen Metrik nicht sämtliche $\left\{ \begin{matrix} rs \\ i \end{matrix} \right\}$ verschwinden. Alle Scheinkräfte haben die charakteristische Eigenschaft, der *trägen Masse proportional* zu sein. Infolge der experimentell mit großer Genauigkeit erwiesenen *Proportionalität zwischen gravitierender und träger Masse* zeigt auch die *Newtonsche* Gravitationskraft diese Eigentümlichkeit.

Das Einkörperproblem.

Die *kugelsymmetrische Lösung* der Feldgleichungen für den leeren Raum:

(1) $$R_{ik} = 0$$

kann immer auf folgende Form gebracht werden (*Schwarzschildsches Linienelement*):

(2) $$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) + c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2. \quad (r > \alpha)$$

α ist eine Konstante und wird als „*Gravitationsradius*" der zentralen Masse M bezeichnet:

(3) $$\alpha = \frac{2fM}{c^2} = \frac{\varkappa}{4\pi} M.$$

Für die Sonne hat α den Wert: $1{,}47 \cdot 10^5$ cm.

Die Gleichung der geodätischen Linien hat in der Ebene $\varphi = \text{const}$ folgende intermediäre Integrale:

(4) $$r^2 \frac{d\vartheta}{ds} = \text{const} \quad \text{(Flächensatz)}$$

(4a) $$\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\frac{dt}{ds} = \text{const} \quad \text{(Energiesatz)}.$$

Die Bahnkurve hat die Differentialgleichung:

(5) $$\frac{ds}{d\vartheta} = \sqrt{\varepsilon^2 \varrho_0^2 - \varrho^2}\,\sqrt{1 - 3\,\alpha\varrho_0 - \alpha\varrho},$$

wo $\varrho = \frac{1}{r} - \varrho_0$ gesetzt ist. Die exakte Integration führt auf ein elliptisches Integral; infolge der Kleinheit von α kann aber das Glied $\alpha\varrho$ vernachlässigt werden, und man hat dann:

(6) $$r = \frac{1}{\varrho_0\left[1 + \varepsilon\cos\left(1 - \frac{3\,\alpha}{2}\varrho_0\right)\vartheta\right]}.$$

Das sind die *Keplerschen Ellipsenbahnen* mit $\varrho_0 = \frac{1}{a(1-\varepsilon^2)}$. Infolge des Faktors von ϑ tritt aber eine *Perihelpräzession* auf von der Größe $3\,\pi\alpha\varrho_0 = \frac{6\,\pi f M}{c^2 a(1-\varepsilon^2)}$ pro Umlauf. Beim Merkur erreicht diese Präzession 43″ im Jahrhundert.

Unter den geodätischen Linien gibt es auch solche von der Bogenlänge 0. Man nennt sie die *geodätischen Nullinien* und erhält sie z. B., indem man die Konstante des Flächensatzes $= \infty$ setzt. Die Weltlinien der *Lichtstrahlen* sind geodätische Nullinien. Ihre Bahnlinien sind in erster Näherung schwach gekrümmte Hyperbeln mit dem Asymptotenwinkel:

$$\omega = 2\frac{\alpha}{r_0},$$

wenn r_0 die größte Sonnennähe bedeutet. Für einen am Sonnenrand vorbeieilenden Lichtstrahl ist $\omega = 1{,}77''$. Diese *Lichtablenkung* ist doppelt so groß, als wenn man nach der Emissionstheorie und der *Newtonschen* Mechanik rechnet.

Die zwischen 2 Lichtsignalen verstreichenden *Eigenzeiten* sind in der Entfernung r und r' voneinander verschieden, und zwar ist ihr Verhältnis:

$$\frac{t}{t'} = \sqrt{\frac{1-\frac{\alpha}{r}}{1-\frac{\alpha}{r'}}}.$$

Das gibt zu einem *Dopplereffekt* Veranlassung von der Größe:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\alpha}{2r},$$

wenn $r' = \infty$ gesetzt werden kann. (*Rotverschiebung der Spektrallinien.*) Für einen vom Sonnenrand kommenden Lichtstrahl beträgt der Effekt: $2 \cdot 10^{-6}$.

Literatur.

W. Pauli jr.: Relativitätstheorie (Leipzig: B. G. Teubner), *H. Weyl*: Raum, Zeit, Materie (Berlin: J. Springer), *M. v. Laue*: Relativitätstheorie (Braunschweig: Vieweg).

Vierzehnter Abschnitt.

Thermodynamik.

A. Grundbegriffe.

Die Thermodynamik beschäftigt sich mit Systemen räumlich nebeneinander befindlicher homogener Körper.

Homogen heißt dabei ein Körper, wenn seine räumlichen Bestandteile gleich sind bezüglich ihrer makroskopischen Bestimmungsstücke, wie chemische Zusammensetzung, Dichte, Elastizität usw.

Die Erfahrung zeigt, daß bei gegebener chemischer Zusammensetzung der *Zustand* jedes homogenen Körpers (d. h. die Gesamtheit der übrigen genannten Bestimmungsstücke) festgelegt ist durch den äußeren (allseitigen) *Druck* p, unter dem der Körper (und daher jeder seiner Raumteile) steht und durch seine Dichte d bzw. sein *spezifisches Volumen* $v = \frac{1}{d} = \frac{V}{M}$ ($V =$ Volumen, $M =$ Masse des Körpers). p und v heißen *Zustandsvariablen*.

Eine Wand (Trennungsfläche zwischen zwei Körpern) heißt *wärmeundurchlässig* oder *adiabatisch*, wenn ein von ihr umhüllter homogener Körper seinen Zustand p, v bei Anschluß äußerer Fernkräfte nur dann ändert, wenn die Wand bewegt wird. Jede andere Wand heißt *diatherman* oder *wärmedurchlässig*.

Die Erfahrung zeigt, daß ein adiabatisch begrenztes System, dessen homogene Einzelsysteme diatherman einander berühren, nur dann im *Gleichgewicht* ist, d. h. seinen Zustand bewahrt, wenn die Zustandsvariablen p_i, v_i der Einzelsysteme zusammenhängen durch Relationen:

$$(1) \qquad f_1(p_1, v_1) = f_2(p_2, v_2) = \ldots, \; f_i(p_i, v_i) = F(\vartheta),$$

wo die Form der Funktionen f_i nur durch die chemische Zusammensetzung bestimmt ist. Die Funktion F kann dabei willkürlich angenommen werden.

Wir können daher auch ϑ *als Zustandsvariable* benutzen. ϑ heißt empirische *Temperatur* (in zunächst willkürlicher Skala).

B. Hauptsätze.

1. *Hauptsatz*: Um ein adiabatisch abgeschlossenes, d. h. von adiabatischen Wänden umschlossenes System von einem Gleichgewichtszustand (1) zu einem anderen (2) zu bringen, ist immer dieselbe Arbeit A erforderlich, unabhängig von der Form des Übergangs.

$$A = U_{(2)} - U_{(1)}. \tag{2}$$

U ist eine Funktion der Zustandsvariabeln und heißt die *Energie* des Systems. Sie ist nur bis auf eine additive Konstante bestimmt.

Für ein nicht adiabatisch abgeschlossenes System gilt die Gleichung im allgemeinen nicht.

$$Q = U_{(2)} - U_{(1)} - A \tag{3}$$

heißt dann die dem System zugeführte *Wärmemenge.*

Quasistatisch heißt eine Zustandsänderung, bei der das System sich immer nur um verschwindende Größen vom Gleichgewicht entfernt.

Für solche gilt (im Fall rein mechanischer Arbeitsleistung):

$$dA = -p\,dV,$$

mithin

$$dQ = dU + p\,dV, \tag{4}$$

im Falle des adiabatischen Systems also

$$dQ = dU + p\,dV = 0. \tag{5}$$

Ebenso gilt für jeden homogenen Bestandteil:

( ) $$dQ_i = dU_i + p_i\,dV_i,$$

und es ist

( ) $$dU = \sum_i dU_i; \quad dQ = \sum_i dQ_i.$$

Sei λ_i eine Funktion der Zustandsvariablen des Teils i, welche als integrierender Nenner die Größe $d\varphi_i = \frac{dQ_i}{\lambda_i}$ zu einem vollständigen Differential macht. Dann ist auch φ_i als Zustandsvariable benutzbar.

Ein solcher integrierender Nenner existiert sicher, da dQ_i nur von zwei Variabeln abhängt.

Es ist dann für ein adiabatisch abgeschlossenes System

$$dQ = \sum \left(\frac{\partial U_i}{\partial \varphi_i} + p_i \frac{\partial V_i}{\partial \varphi_i}\right) d\varphi_i + \left(\frac{\partial U_i}{\partial \vartheta} + p_i \frac{\partial V_i}{\partial \vartheta}\right) d\vartheta = 0. \tag{5'}$$

Diese (*Pfaff*sche) Gleichung mit mehr als zwei unabhängigen Variabeln hat einen integrierenden Nenner λ (vgl. S. 124) wegen des

2. *Hauptsatzes* (in der Form von *Carathéodory*):[1]) In beliebiger Nähe jedes Zustands eines adiabatischen abgeschlossenen Systems gibt es Nachbarzustände, die von ihm aus (etwa durch äußere Arbeit) nicht erreichbar sind.

(6) $d\varphi = \frac{dQ}{\lambda}$ sei also ein totales Differential.

Dann gilt wegen $d\varphi_i = \frac{dQ_i}{\lambda_i}$ auch

$$\lambda\, d\varphi = \sum_i \lambda_i\, d\varphi_i,$$

also bei $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ und ϑ als Zustandsvariabeln:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_i} = \frac{\lambda_i}{\lambda}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = 0.$$

φ ist also Funktion der φ_i allein:

$$\varphi = \varphi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots),$$

während λ außerdem von ϑ abhängen kann:

$$\lambda = \lambda(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \vartheta).$$

Dann ist auch $\quad \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda}\right) = 0,$

also

(7) $$\lambda_i = G(\vartheta)\cdot \Phi_i(\varphi_i)$$

und

(7′) $$\lambda = G(\vartheta)\cdot \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots).$$

wo $G(\vartheta)$ eine für *alle* Teile und das ganze System identische Funktion von ϑ ist.

Wegen

$$d\varphi = \sum \frac{\lambda_i\, d\varphi_i}{\lambda} = \sum \frac{\Phi_i}{\Phi}\, d\varphi_i \quad \text{folgt} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_k}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_i} - \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_i}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_k} = 0,$$

ist Φ eine Funktion von $\varphi(\varphi_1, \varphi_2 \ldots)$ d. h. $\lambda = G(\vartheta)\,\Phi(\varphi)$.

Da auch $\frac{\lambda_i}{\Phi_i(\varphi_i)}$ bzw. $\frac{\lambda}{\Phi(\varphi)}$ integrierende Nenner der Differentiale dQ_i bzw. dQ sind, wenn λ_i bzw. λ es sind, so ist auch

$$G(\vartheta) = e^{\int^{\vartheta} \left.\frac{\partial \ln \lambda_i}{\partial\vartheta}\right|_{\varphi_i} d\vartheta} = e^{\int^{\vartheta} \left.\frac{\partial \ln \lambda}{d\vartheta}\right|_{\varphi} d\vartheta}$$

ein solcher für dieselben. Wir nennen

(8) $$T = C(G(\vartheta))$$

die *thermodynamische Temperatur*, wo C ein Maßstabfaktor ist.

---

[1]) Mathem. Ann. 61. 355. 1909. vgl. auch M. Born. Phys. 2. 22. 218. 1921.

Dann ist

(9) $$dQ_i = \lambda_i \, d\varphi_i = \frac{T}{C} \, \Phi_i \, d\varphi_i = T \, dS_i,$$

$$S_i = \frac{1}{C} \int \Phi_i \, d\varphi_i$$

heißt die *Entropie* des Teils i.

(9′) $$dQ = \frac{T}{C} \, \Phi(\varphi) \, d\varphi = T \, dS,$$

$$S = \frac{1}{C} \int \Phi(\varphi) \, d\varphi$$

heißt die *Gesamtentropie* des Systems.

Wegen $dQ = \sum_i dQ_i$ folgt

(10) $$dS = \sum_i dS_i.$$

Wegen der Additivität von $dU = \sum_i dU_i$ (7) und $dS = \sum_i dS_i$ (10) können wir auch die Differentiale der *spezifischen Energie* bzw. *Entropie* einführen du bzw. ds und erhalten:

(11) $$du = T \, ds - p \, dv.$$

C. Zustandsvariabeln.

Als Parameter zur thermodynamischen Charakterisierung *des Zustandes* eines homogenen Stoffes kann man also zwei beliebige der Größen p, v, T, s verwenden, sowie der aus diesen abgeleiteten Größen u, f, ψ, χ, welche definiert sind durch

(1) $$\begin{aligned} du &= T \, ds - p \, dv, \\ df &= -s \, dT - p \, dv, \\ d\psi &= -s \, dT + v \, dp, \\ d\chi &= T \, ds + v \, dp, \end{aligned}$$

und durch eine *Legendre*sche Transformation auseinander hervorgehen, indem man setzt:

(2) $$\begin{aligned} f &= u - Ts, \\ \psi &= f + pv = u - Ts + pv, \\ \chi &= u + pv. \end{aligned}$$

f heißt spezifische freie Energie,
ψ „ thermodynamisches Potential,
χ „ Wärmefunktion.

Das Gesamtvolumen, Gesamtentropie usw. findet man aus den spezifischen durch Multiplikation mit der Masse M des Körpers

$$V = Mv, \quad S = Ms \text{ usw.}$$

Die Masse M eines aus N Molekülen vom Molekulargewicht m bestehenden Körpers ist

$$M = N \cdot m \cdot \frac{k}{R}$$

wo $k = 1{,}37 \cdot 10^{-16}$, d. h. gleich der *Boltzmann*schen Konstanten und $R = 8{,}315 \cdot 10^7$, d. h. gleich der Gaskonstanten ist (vgl. S. 250).

$n = \frac{Nk}{R}$ heißt die Anzahl der „Mole" des Körpers

also ist $M = nm$.

Die Kombination mehrerer Körper, deren Zustand durch die Variablen p, v, T, s definiert ist, heißt ein *inhomogenes System.*

Für den Zustand des Systems sind folgende Größen von Bedeutung:

$$M = \sum_i M_i \quad = \text{Masse}$$
$$V = \sum_i M_i v_i = \text{Volumen}$$
$$S = \sum_i M_i s_i = \text{Entropie}$$
$$U = \sum_i M_i u_i = \text{Energie}$$
$$F = \sum_i M_i f_i = \text{freie Energie}$$
$$\Psi = \sum_i M_i \psi_i = \text{thermodyn. Potential}$$
$$X = \sum M_i \chi_i = \text{Wärmefunktion.}$$

D. Koeffizienten.

Folgende partielle Differential-Quotienten haben besondere Bedeutung und Namen:

$c_v = \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v$ spezifische Wärme bei konstantem Volumen,

$c_p = \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ spez. Wärme bei konstantem Druck,

$\alpha = \frac{1}{v_0}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ Ausdehnungskoeffizient,

$\sigma = \frac{1}{p_0}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$ Spannungskoeffizient,

$\varepsilon = -v_0\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T$ Elastizitätskoeffizient $\left(\frac{1}{\varepsilon} = \text{Kompressionskoeffizient}\right)$.

Beziehungen zwischen diesen sind u. a. $\frac{p_0 \cdot \sigma}{\varepsilon\,\alpha} = 1$,

$$c_p - c_v = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = T p_0 \cdot \sigma\, v_0\, \alpha$$
$$= -T\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p^2 = T \cdot \varepsilon \cdot \alpha^2\, v_0$$

Ferner gelten folgende Beziehungen:

$$s(pT) = s_{0p} + \int_0^T \frac{c_p}{T}\,dT, \quad u(pT) = u_{0p} + \int_0^T c_p\,dT - p\int_0^T \frac{\partial v}{\partial T}\Big|_p\,dT,$$

$$s(vT) = s_{0v} + \int_0^T \frac{c_v}{T}\,dT, \quad u(vT) = u_{0v} + \int_0^T c_v\,dT.$$

E. Spezialfälle.

1. Ideale Gase.

Bei den sogenannten *idealen Gasen* sind zwei Zustände p_1, v_1 und p_2, v_2 im thermischen Gleichgewicht, wenn $p_1 \cdot v_1 = p_2 \cdot v_2$ ist. Also kann nach (A 1) durch $p \cdot v = \vartheta$ eine spezielle Temperaturskala ϑ eingeführt werden. Bei den idealen Gasen ist ferner u nur von $p \cdot v$ abhängig, also $u = u(\vartheta)$. Daher wird

$$dq = du + p\,dv = \vartheta\left[\frac{u'}{\vartheta}\,d\vartheta + d\ln v\right] = \vartheta \cdot d\ln(\Theta \cdot v),$$

falls

$$\ln\Theta = \int \frac{u'}{\vartheta} \cdot d\vartheta$$

gesetzt wird.

also $$dq = \lambda\,d\varphi \quad \text{mit } \lambda = \vartheta = pv, \quad \varphi = \lg(\Theta \cdot v)$$

Nach (B 7′) wird dann

$$T = C \cdot G(\vartheta) = C\,e^{\int^{\vartheta} \frac{\partial \ln \lambda}{\partial \vartheta}\,d\vartheta} = C\vartheta = Cpv$$

die thermodynamische Temperatur. Sie ist also bei einem idealen Gas (bis auf eine Maßstabkonstante) identisch mit der „Gastemperatur".

Für *ideale Gase* machen wir folgenden durch die Erfahrung gebotenen Ansatz:

$$pv = rT,$$
$$u = u_0 + apv = u_0 + arT,$$

Dann wird:

$$dq = T\,ds = du + p\,dv = (a+1)p\,dv + av\,dp,$$
$$= ar\,dT + \frac{arT}{v}\,dv = (a+1)r\,dT - \frac{rT}{p}\,dp$$

also: $$s = s_0 + ar\ln\left(v^{\frac{a+1}{a}}p\right);$$

und die „*spezifische Wärme*" bei konstantem Druck:

$$\frac{\partial q}{\partial T}\Big|_p = (a+1)r = c_p,$$

bei konstantem Volumen:

$$\left.\frac{\partial q}{\partial T}\right|_v = a r = c_v,$$

und hieraus:

$$c_p - c_v = r; \quad \frac{c_p}{c_v} = \frac{a+1}{a} = \gamma; \quad a = \frac{1}{\gamma - 1}.$$

Aus $p \cdot v = rT$ folgt:

$$\frac{1}{v_0}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \alpha = \frac{1}{v_0}\frac{r}{p} = \text{Ausdehnungskoeffizient},$$

$$\frac{1}{p_0}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \sigma = \frac{1}{p_0}\frac{r}{v} = \text{Spannungskoeffizient},$$

$$-v_0\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = \varepsilon = p \quad = \text{Elastizitätskoeffizient}.$$

Die Erfahrung (sowie die kinetische Theorie der Gase) ergibt, daß $R = rm$, wo m das *Molekulargewicht* des Gases bedeutet, eine *universelle Konstante* ist, die „*Gaskonstante*"

$$R = 1{,}98\,\frac{\text{cal}}{\text{mol}} = 8{,}315 \cdot 10^7\,\frac{\text{erg}}{\text{mol}}.$$

Für einatomige Gase ergibt die Gastheorie . . . . $a = \frac{3}{2}$; $\gamma = \frac{5}{3}$,
für zweiatomige Gase ergibt die Gastheorie . . . . $a = \frac{5}{2}$; $\gamma = \frac{7}{5}$,
für drei- und mehratomige Gase ergibt die Gastheorie $a = 3$; $\gamma = \frac{4}{3}$.

Also wird hier

$$pv = \frac{RT}{m}; \quad s = s_0 + \frac{aR}{m}\ln(v^\gamma p),$$

$$u = u_0 + \frac{aRT}{m}, \quad c_p = \frac{a\gamma \cdot R}{m}; \quad c_v = \frac{aR}{m},$$

oder:

$$s = \text{Const} + c_v \ln T + \frac{R}{m}\ln\frac{T}{p}.$$

$$= \text{Const} + c_p \ln T - \frac{R}{m}\ln p$$

$$u = u_0 + c_v T,$$

$$f = (u_0 - Ts_0) + c_v T(1 - \ln(v^\gamma p)),$$

$$\psi = (u_0 - Ts_0) + T(c_p - c_v \ln(v^\gamma p)),$$

$$\chi = u_0 + c_p T.$$

2. Gemische idealer Gase.

Für einen Körper vom Volumen V, der Temperatur T und dem Druck p, der aus verschiedenen Molekülen m_i mit den Molzahlen n_i besteht, gelten einfache Verhältnisse nur falls sich die Moleküle nicht gegenseitig beeinflussen, z. B. bei Gemischen idealer Gase.

Wir führen die Größen ein, die für jede Molekulart gelten würden, wenn diese allein anwesend wäre,

$$\overline{p}_i = \frac{RT}{m_i}\frac{M_i}{V} = \frac{RT}{V} n_i \quad (\textit{Partialdruck})$$

$$\overline{U}_i = M_i(u_{oi} + c_{vi} T) = n_i m_i (u_{oi} + c_{vi} T)$$

$$\overline{S}_i = n_i\left(m_i c_{vi} \ln T + R \ln\frac{T}{p_i} + k_i\right).$$

Dann gilt

$$p = \sum_i \overline{p}_i = \frac{RT}{V}\sum_i n_i \quad (\textit{Daltonsches Gesetz})$$

$$U = \sum_i \overline{U}_i$$

$$S = \sum_i \overline{S}_i \quad (\textit{Gibbssches Paradoxon}).$$

Daraus folgt

$$\overline{p}_i = \frac{p \cdot n_i}{\Sigma n} = p\, c_i$$

$c_i = \frac{n_i}{\Sigma n}$ heißt *molare Konzentration.*

Entropiezunahme bei Mischung.

Zwei ideale Gase mit den Molzahlen n_1 und n_2, beide mit gleichem p und T nebeneinander liegend, haben insgesamt die Entropie

$$S = n_1\left(c_{v_1} m_1 \ln T + R\ln\frac{T}{p} + k_1\right) + n_2\left(c_{v_2} m_1 \ln T + R\ln\frac{T}{p} + k_2\right)$$

Tritt nach Wegnahme ihrer Scheidewand eine Diffusion ein, welche zu den Partialdrucken

$$p_1 = c_1 p,\quad p_2 = c_2 p \quad \left(c_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_2},\quad c_2 = \frac{n_2}{n_1 + n_2}\ \text{Konzentrationen}\right)$$

führt, so wird die Entropie nach Beendigung der Diffusion:

$$S = n_1\left(c_{v_1} m_1 \ln T + R\ln\frac{T}{p_1} + k_1\right) + n_2\left(c_{v_2} m_1 \ln T + R\ln\frac{T}{p_2} + k_2\right)$$

Die Entropieänderung beträgt also

$$-n_1 R \cdot \ln\frac{p_1}{p} - n_2 \ln\frac{p_2}{p} =$$

$$-n_1 R \ln c_1 - n_2 R \ln c_2 \quad (\text{positiv}).$$

3. Hohlraumstrahlung.

Für einen *mit Strahlung erfüllten Hohlraum* vom Volumen V gilt, wenn man $U = uV$ setzt und $S = sV$, wo u die Energie und s die Entropie pro *Volumeinheit* bedeutet:

$$dS = \frac{dU + p\,dV}{T}.$$

Da hier nach der *Maxwell*schen Theorie $u = 3p$ wird, so ist

$$dS = d(sV) = s\,dV + V\,ds = \frac{3V\,dp + 4p\,dV}{T},$$

also

$$ds = \frac{3\,dp}{T}; \quad s = \frac{4p}{T},$$

und daher

$$T = \text{const} \cdot p^{\frac{1}{4}}.$$

$$U = 3pV = \alpha T^4 V$$

(*Stephan-Boltzmann*sches Gesetz).

$$\left(\alpha = 7{,}18 \cdot 10^{-15} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3\,\text{grad}^4}\right),$$

$$S = \frac{4}{3}\alpha T^3 V; \quad F = -\frac{1}{3}\alpha T^4 V; \quad \Psi = 0; \quad X = \frac{4}{3}\alpha T^4 V.$$

F. Prozesse.

Die Änderung der Zustandsvariabeln eines Systems heißt ein *Prozeß*. Man unterscheidet:

$T = \text{const}$: isothermer Prozeß,
$S = \text{const}$: adiabatischer Prozeß,
$V = \text{const}$: isochorer (isopykner) Prozeß,
$p = \text{const}$: isobarer (isopiestischer) Prozeß.

Die physikalische Realisierung dieser Bedingungen kann z. B. erfolgen:

1. $T = \text{const}$ durch den Kontakt mit einem großen Wärmereservoir,
2. $s = \text{const}$ durch eine wärmeundurchlässige Umhüllung,
3. $v = \text{const}$ durch eine starre Umhüllung,
4. $p = \text{const}$ durch die Wirkung eines mit Gewicht belasteten Kolbens.

1. und 2. sind daher nicht vereinbar, ebensowenig 3. und 4.

Kreisprozeß heißt ein Prozeß, der nach beliebiger Änderung der Variabeln zum Ausgangszustand zurückführt. Da weder da noch dq totale Differentiale sind, wird $\Delta a = \oint da$ sowie $\Delta q = \oint dq$ je einen bestimmten von 0 verschiedenen Wert haben. Andererseits ist $\Delta u = \oint du = 0$, also $\Delta a = \Delta q$. Durch den Kreisprozeß ist Wärme in Arbeit (oder umgekehrt) „umgewandelt" worden.

Wichtig ist folgender mit einem beliebigen System z. B. einem idealen Gase durchgeführter Kreisprozeß (*Carnotprozeß*) zwischen zwei Wärmereservoiren R_1 und R_2 mit den Temperaturen T_1 und T_2 $(T_1 > T_2)$:

1. adiabatische Expansion von T_1 zu T_2,
2. isotherme Kompression bei T_2 (Kontakt mit R_2),
3. adiabatische Kompression von T_2 zu T_1,
4. isotherme Expansion bei T_1 zum ursprünglichen Volumen.

Da
$$\oint dS = \frac{\Delta Q_1}{T_1} + \frac{\Delta Q_2}{T_2} = 0.$$
ist, wird hierbei eine Arbeit ΔA gewonnen:
$$\Delta A = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 = \frac{\Delta Q_1 (T_1 - T_2)}{T_1} = \frac{\Delta Q_2 (T_2 - T_1)}{T_2}.$$
wo ΔQ_1 bzw. ΔQ_2 die den Reservoiren entnommenen Wärmemengen sind.

G. Zustandsgleichung.

Für einen homogenen Stoff bestimmen zwei der Variablen $p v T$ die dritte. Dieser Zusammenhang wird durch die *Zustandsgleichung* des Stoffes festgelegt: $p = p(v, T)$; $v = v(p, T)$ usw.

Kritischer Punkt heißt der Zustand, in dem
$$\left.\frac{\partial p}{\partial v}\right|_T = 0 \quad \text{und} \quad \left.\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right|_T = 0$$
ist. Die dort geltenden Variablen $p_1 T_1 v_1$ heißen *kritischer Druck, kritische Temperatur* und *kritisches Volumen.*

Führt man als neue Variablen die Größen
$$\nu = \frac{v}{v_1}; \quad \pi = \frac{p}{p_1}; \quad \tau = \frac{T}{T_1}$$
ein, so heißen diese *reduzierte* Zustandsdaten. Die *reduzierte Zustandsgleichung* $\pi = \pi(\nu, \tau)$ ist für die meisten Substanzen nahezu gleich. (Das ist streng nur möglich, wenn die Zustandsgleichung nur drei für den Stoff charakteristische Konstanten enthält.)

Für hinreichend hohe Temperaturen nähert sich die Zustandsgleichung aller Stoffe der der idealen Gase $p v = \frac{RT}{m}$ (m = Molekulargewicht, R = Gaskonstante). Nach *van der Waals* läßt sich durch die Gleichung
$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = \frac{RT}{m}$$
die Zustandsgleichung aller Stoffe für größere Bereiche angenähert darstellen.

Gilt diese Gleichung streng, so wird:
$$v_1 = 3b; \quad p_1 = \frac{a}{27b^2}; \quad T_1 = \frac{8}{27}\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{R}$$
also:
$$a = 3\pi\nu^2; \quad b = \frac{\nu}{3}; \quad m = \frac{3}{8}\frac{R\tau}{\pi\nu}.$$
Die reduzierte Zustandsgleichung lautet dann:
$$\left(\pi = \frac{3}{\nu^2}\right)(3\nu - 1) = 8\tau$$
Boylepunkt heißt die Temperatur T_B, bei der $\left.\frac{\partial(pv)}{\partial p}\right|_{p=0} = 0$ ist.

Inversionspunkt heißt die Temperatur T_v, bei der $T\left.\frac{\partial v}{\partial T}\right|_p - v = 0$ ist. Es ist angenähert $T_v = 2T_B = \frac{2am}{Rb}$. Ist T größer als T_v, so liefert eine Expansion ohne Arbeitsleistung eine Erwärmung, ist T kleiner als T_v, eine Abkühlung.

H. Vollständige Systeme.

Ein System heißt *vollständig* oder *abgeschlossen*, wenn sein Zustand unabhängig ist von den Vorgängen außerhalb von ihm[1]).

Die Abgeschlossenheit eines Systems wird nicht berührt durch die Möglichkeit von äußeren Eingriffen, welche keine Veränderungen außerhalb hinterlassen, also speziell keine Energie erfordern, wie z. B. Betätigung von Sperrungen, Öffnen und Schließen von Ventilen oder Kontakten u. dgl. Ohne solche Eingriffe wäre ja jede Beeinflussung eines abgeschlossenen Systems unmöglich.

Ein Prozeß (eines vollständigen Systems) heißt *reversibel*, wenn er von außen rückgängig gemacht werden kann (ohne außerhalb Veränderungen zu hinterlassen), andernfalls *irreversibel*.

Bei einem reversiblen Prozeß bleibt $S = \sum_i M_i s_i$ konstant. Bei einem irreversiblen wächst S (2. *Hauptsatz*).

Hat S den Maximalwert, der für das System durch Änderung der Variablen der Bestandteile (bei konstanter Gesamtenergie) erreichbar ist, so ist kein irreversibler Prozeß mehr möglich. Da reversible Prozesse in der Natur nie vollständig realisierbar sind, ist das System dann im *Gleichgewicht*.

Die allgemeinste Gleichgewichtsbedingung für abgeschlossene Systeme lautet also $\delta S = 0$ (S = Maximum).

Eine wichtige Methode, in einem abgeschlossenen System einen Prozeß reversibel zu führen, besteht darin, daß man zwischen zweien seiner Bestandteile eine Maschine einschaltet, in der man einen *Carnot*schen Kreisprozeß durchführt. Dann ist

(1) $$\frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2} = dS_1 + dS_0 = dS = 0.$$

(Die Maschine kann dabei beliebig klein angenommen werden, so daß sie gegen das übrige System verschwindet. Da in ihr definitiv keine Veränderung vor sich geht, kann sie auch als außerhalb des Systems betrachtet werden.) Die hierbei gewonnene Arbeit soll dann in irgendeiner Weise etwa durch Kompressionsarbeit oder über einen zweiten Carnotstrom dem übrigen System wieder zugeführt werden.

---

[1]) Es sind also für ein solches V (und natürlich auch M) unveränderliche Größen. U ist gleichfalls eine Konstante (1. *Hauptsatz*).

Eine einfache Betrachtung zeigt, daß jede Vorrichtung, die reversibel Wärme in Arbeit umwandelt (oder umgekehrt) dieselbe Beziehung zwischen dQ_1, dQ_2 und dA liefert wie die Carnotmaschine. Alle derartigen Prozesse, die reversibel verlaufen, sind daher durch die fiktive Einschaltung einer Carnotmaschine der Berechnung zugänglich.

Wichtige Vorgänge, die zu *Irreversibilität* Anlaß geben sind:

1. Ausdehnung eines Gases ohne äußere Arbeit

$$\Delta s = \frac{R}{M} \frac{\Delta v}{v}$$

(für kleines Δv und ideales Gas).

2. Diffusion von Gasen, Salzen u. dgl.

$$\Delta S = \Delta M \cdot \frac{R}{M} \frac{\Delta p}{p}.$$

3. Wärmeleitung

$$\Delta S = \Delta Q \cdot \frac{\Delta T}{T^2}.$$

4. Reibungsarbeit

$$\Delta S = \frac{\Delta A}{T}.$$

Ein *nicht abgeschlossenes* System kann durch Hinzufügen der Umgebung zu einem abgeschlossenen gemacht werden. Werden die Zustandsvariablen der Umgebung durch einen Index bezeichnet, so ist bei einem Prozeß $dS + dS' \geqq 0$. Wir nehmen an, daß in der Umgebung keine Vorgänge geschehen, die zu Irreversibilität führen (s. o.). Dann ist

$$dS' = \frac{dQ'}{T'}; \quad dQ = -dQ$$

also

$$dS - \frac{dQ}{T'} \geqq 0$$

(2)
$$dS - \frac{dU - dA}{T'} \geqq 0,$$

anders geschrieben

(2')
$$dU - T'dS \leqq dA.$$

Spezialfälle:

1. $dQ' = 0$ (adiabatischer Vorgang) liefert $dU = dA$; $dS \geqq 0$.
2. $T = \text{const}$ (isothermer Vorgang) liefert $dF = d(U - TS) \leqq dA$ (freie Energie)[1].

[1] dF stellt also den Minimalbetrag der aufzuwendenden bzw. den Maximalbetrag der zu gewinnenden Arbeit dar, wenn das System einen isothermen Prozeß durchmacht. Hieraus beruht die Bedeutung von F

$$\Delta A = \Delta F = \Delta(U - TS) = \Delta U - T \cdot \frac{\partial \Delta F}{\partial T} = \Delta U - T \frac{\partial \Delta A}{\partial T}$$

angewandt auf reversible, isotherme Prozesse heißt „*Helmholtzsche Gleichung*".

3. T und $p = \text{const}$
liefert $dA = -p\,dV$
$d\Psi = d(U - TS + pV) \geqq 0$ (thermodynamisches Potential).

Gleichgewichte für unvollständige Systeme (in Verbindung mit der Umgebung) bestehen, wenn $\delta S + \delta S' = 0$ ist, also

für adiabatisch abgeschlossene Systeme, wenn $\delta S = 0$ (max)
für isotherm gehaltene Systeme, wenn $\delta F = 0$ (min)
für isotherm und isobare Systeme, wenn $\delta \Psi = 0$ (min)
ferner wenn S und V konstant bleiben $\delta U = 0$ (min)
wenn S und p konstant bleiben $\delta X = 0$ (min).

J. Spezielle Gleichgewichte.

Spezialfälle für *vollständige* Systeme ($\delta U = 0$; $\delta V = 0$; $\delta S = 0$; $\delta M = 0$).

1. *Die M_i seien konstant*, realisierbar durch Umhüllung jedes Bestandteils mit einer wärmedurchlässigen, nicht starren Hülle.

Es folgt

$$T_1 = T_2 = T_3 = \ldots = T_i$$
$$p_1 = p_2 = p_3 = \ldots = p_i.$$

Hierauf beruht die Möglichkeit, mit Probekörpern (*Thermometer* und *Manometer*) Temperatur und Druck beliebiger Stoffe zu messen.

2. *Die M_i und v_i seien konstant;* wärmedurchlässige starre Umhüllungen.

Es folgt

$$T_1 = T_2 = T_3 = \ldots = T_i.$$

3. *Die s_i und M_i seien konstant,* realisierbar durch Umhüllung jedes Bestandteils durch eine wärmeundurchlässige, nicht starre Hülle.

Es folgt

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_i.$$

4. Die M_i seien nicht konstant, sondern nur M. Die einzelnen Körper (Phasen) können in ihrer Menge sich ändern (Verdampfung usw).

Es folgt

$$T_1 = T_2 = \ldots = T_i$$
$$p_1 = p_2 = \ldots = p_i$$
$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_i.$$

p und T bestimmen sich hier gegenseitig eindeutig, solange mehrere nichtidentische Bestandteile existieren.

Da S ein Maximum sein muß, muß

$$(1) \qquad \delta^2 S = -\sum_i \left(M_i c_{vi} \delta T_i^2 + \left(\frac{\partial p_i}{\partial v_i}\right)_T \delta v_i^2 \right) < 0.$$

Besteht das System nur aus zwei Bestandteilen 1 und 2 und geht man von einem Gleichgewichtszustand zu einem andern über, bei dem T zu $T + dt$, p zu $p + dp$ wird, so ist

$$d\psi_1 - d\psi_2 = 0 = -(s_1 - s_2)\,dt + (v_1 - v_2)\,dp,$$

also

(2) $$s_1 - s_2 = (v_1 - v_2)\frac{dp}{dT}.$$

Bei einer Umwandlung unter konstantem Druck und Temperatur aus einem Gleichgewicht in einen andern (Verdampfung usw.) ist eine Wärmezufuhr $\Delta Q = T\Delta S$ erforderlich. Wird hierbei die Menge M aus dem Zustand $s_1 v_1 p T$ in den Zustand $s_2 v_2 p T$ umgewandelt, so ist

$$\Delta Q = T \cdot M(s_1 - s_2).$$

$\frac{\Delta Q}{M} = r$ heißt *Umwandlungswärme*. Es folgt

(3) $$r = T(s_1 - s_2) = (v_1 - v_2)\,T\,\frac{dp}{dT}$$ (*Clausius-Clapeyron*sche Gleichung)[1]).

K. Phasentheorie.

Es seien α verschiedene Bestandteile („Komponenten") in den voneinander unabhängigen Mengen M_i gegeben, die sich zu Verbindungen[2]) vereinigen können. Von diesen sollen eine Anzahl β gleichzeitig nebeneinander existieren (Phasen), deren Mengen M^k seien.

In der k-ten Phase sei die Menge M_k^i des i-ten Stoffes enthalten.

Es ist also

$$M_i = \sum_k M_i^k; \qquad M^k = \sum_i M_i^k. \qquad \begin{array}{l} i = 1,2\cdots\alpha \\ k = 1,2\cdots\beta \end{array}$$

Der Gleichgewichtszustand ist abhängig von den Variablen p und T, sowie den Zusammensetzungen der Phasen, etwa dargestellt durch die Gehalte $c_i^k = \frac{M_i^k}{M^k}$ ($\alpha \cdot \beta$ Größen), zwischen denen die Relationen $\sum_i c_i^k = 1$ (β Gleichungen) bestehen. Er ist nicht abhängig von der Menge einer Phase.

Wenn p und T gegeben sind, lautet die Gleichgewichtsbedingung $\delta\Psi = 0$.

---

[1]) Falls $v_1 = 0$ gesetzt werden kann (Flüssigkeit)

und $v_2 = \frac{RT}{pm}$ gesetzt werden kann (Dampf)

gilt $r = -\frac{RT^2}{m} \cdot \frac{d\ln p}{dt}$.

[2]) Jede Verbindung hat ihre eigene Zustandsgleichung.

Setzt man $\Psi = \sum_k \Psi^k$, dann ist Ψ^k eine homogene Funktion 1. Grades der M_i^k, denn bei Vermehrung aller M_i^k einer Phase um den gleichen Faktor wächst Ψ^k auch um diesen Faktor[1]). Es ist also nach dem *Euler*schen Satz:

$$\Psi^k = \sum_i \frac{\partial \Psi^k}{\partial M_i^k} M_i^k; \tag{1}$$

worin $\frac{\partial \Psi^k}{\partial M_i^k}$ nicht von den M_i^k, sondern außer von p und T nur von den c_i^k abhängt. Daraus folgt

$$\delta \Psi = \sum_k \delta \Psi^k = \sum_k \sum_i \frac{\partial \psi^k}{\partial M_i^k} \delta M_i^k = 0. \tag{2}$$

Dazu treten die Nebenbedingungen $\delta M_i = \delta \sum_k M_i^k = 0$.

Daraus folgen die Gleichungen

$$\frac{\partial \Psi^1}{\partial M_i^1} = \frac{\partial \Psi^2}{\partial M_i^2} = \ldots \qquad (\alpha(\beta - 1) \text{ Gleichungen!}) \tag{3}$$

Im ganzen hat man also $\beta + \alpha(\beta - 1)$ Gleichungen für die $\alpha \cdot \beta + 2$ Größen c_i^k, p, T.

Damit eine Lösung möglich ist, muß $\beta + \alpha(\beta - 1) \leqq \alpha\beta + 2$ sein, d. h. $\beta \leqq \alpha + 2$ (*Phasenregel von Gibbs*).

L. Massenwirkungsgesetz.

Ein Gemisch idealer Gasmoleküle, welche ineinander umgewandelt werden können (Beispiel H_2, I_2, HI) und mit den Molzahlen n_i, also den (molaren) Konzentrationen

$$c_i = \frac{n_i}{n_1 + n_2 + \ldots}, \quad \sum c_i = 1$$

vertreten sind, möge bei der Temperatur T und dem Druck p im Gleichgewicht sein.

Bei Variation der n_i, aber konstantem p und T unter Berücksichtigung von $\sum c_i = 1$ ist die Gleichgewichtsbedingung

$$\delta \Psi = 0, \qquad \sum \delta c_i = 0,$$
$$\sum (\varphi_i - R \ln c_i) \delta n_i = 0,$$

wenn wir unter φ_i den Ausdruck:

$$\varphi_i = \frac{m_i u_i}{T} - m_i c_{vi} \ln T - R \cdot \ln \frac{T}{p} + R$$

verstehen, oder anders geschrieben

$$c_1^{\delta n_1} \cdot c_2^{\delta n_2} \ldots = e^{(\varphi_1 \delta n_1 + \varphi_2 \delta n_2 + \cdots) : R}. \tag{1}$$

---

[1]) Weil keine Veränderungen im übrigen System eintreten, da das Gleichgewicht nicht geändert wird.

Darin hängt die rechte Seite nur von p und T ab. Setzt man also $\delta n_i = \nu_i \cdot z$, wo z irgendein Faktor zur Reduktion der Zahlen δn_i auf möglichst kleine ganze Zahlen ν_i ist, so wird

(2) $$c_1^{\nu_1} \cdot c_2^{\nu_2} \cdots = K(T, p)$$ (Massenwirkungsgesetz).

Beispiel. Dissoziation von Jodwasserstoff.

Drei Molekülarten $n_1 HI$, $n_2 H_2$, $n_3 I_2$.

Je zwei Moleküle HI gehen in ein Molekül H_2 und ein I_2 über, also $\nu_1 = -2$, $\nu_2 = 1$, $\nu_3 = 1$

$$\frac{c_2 c_3}{c_1^2} = \frac{n_2 n_3}{n_1^2} = K(T, p).$$

Falls die Gesamtzahl der idealen Gasmoleküle unverändert bleibt ($\nu_1 + \nu_2 + \cdots = 0$), zeigt sich, daß K nur von T abhängt.

M. Dritter Hauptsatz der Thermodynamik.

(*Nernst*sches Wärmetheorem.)

Die Zustandsvariabeln p, v, T sind ohne weiteres bestimmbar, die s, u, χ nur bis auf eine additive Konstante, die f und ψ nur bis auf eine lineare Funktion der Temperatur.

Die Berechnung von Gleichgewichten wird durch die Unbestimmtheit der additiven Konstanten nicht berührt, wohl aber durch den nicht bestimmbaren Faktor von T in f und ψ.

Diese Schwierigkeit wird behoben durch den von *Nernst* aufgestellten Satz (in der Fassung von *Planck*):

Beim absoluten Nullpunkt $T = 0$ besitzt die Entropie für alle *festen* und *flüssigen* Phasen ein und denselben nicht unendlichen Wert, der gleich 0 gesetzt werden kann: $S_{T=0} = 0$.

Dann sind in solchen Stoffen alle Zustandsvariabeln bis auf eine Konstante berechenbar. Es wird (unter Fortlassung der Konstanten) wegen

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \frac{C_p}{T}$$ [1]

(1) $$S = \int_0^T \frac{C_p \, dT}{T}$$ (Integration bei konstantem Druck).

Damit $S_{T=0}$ endlich bleibt, muß gelten:

$$\lim_{T=0} C_p = 0.$$

Wegen

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_v = \frac{C_v}{T}$$

[1]) C_p bedeutet hier $m c_p$ (Wärmekapazität), analog $C_v = m c_v$.

wird

(2) $$S = \int_0^T \frac{C_v dT}{T} \quad \text{(Integration bei konstantem Volumen),}$$

also

$$\lim_{T=0} C_v = 0.$$

Ferner wird:

(3) $$U = \int_0^T C_v dT \quad \text{bzw.} \quad U = \int_0^T C_p dT$$

(4) $$F = U - TS = T\int_0^T \frac{U}{T^2} dT.$$

Eventuell sind in diesen Formeln noch Umwandlungswärmen zu berücksichtigen.

Es folgen weiter noch folgende Grenzwerte:

Wegen

$$\left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_p$$

und

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T$$

wird ferner

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\int_0^T \frac{1}{T}\frac{\partial C_p}{\partial p} dT = \int_0^T \left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_p dT = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \Big|_0^T$$

also

$$\lim_{T=0} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = 0.$$

Wegen

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$$

ist

$$\lim_{T=0} \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S_{T=0}$$

für alle festen und flüssigen Phasen gleich. Bedeutet demnach $F_1 - F_2 = A_{12}$ die bei der isothermen Umwandlung der Phase 1 in die Phase 2 maximal gewinnbare Arbeit, so ist

$$\lim_{T=0} \left(\frac{\partial A_{12}}{\partial T}\right)_{V_1, V_2} = 0.$$

Die obigen Formeln gelten aber nur für flüssige bzw. feste Phasen.

Für die gasförmige gelten die klassischen Beziehungen, speziell gilt für *ideale Gase*

$$S = C_p \ln T - \frac{MR}{m} \ln p + k$$

(also nicht $= 0$ für $T = 0$!)

ferner

$$\Psi = U - TS + pV = T\left(\frac{MR}{m} \ln p - C_p \ln T - C_p - k\right)$$

$$i = \frac{m}{M}(C_p + k) \quad \text{heißt chemische Konstante.}$$

Ist i bekannt, so sind auch für die Gase alle Zustandsvariabeln angebbar.

Die „*chemische Konstante*“ des betr. Gases ist vollkommen bestimmt und meßbar, wenn ein Weg gefunden wird, das ideale Gas auf reversiblem Wege in den festen oder flüssigen Zustand überzuführen.

Damit sind dann alle Zustandsvariabeln aus thermischen Daten bestimmt und alle Gleichgewichte theoretisch berechenbar.

Literatur.

Planck: Thermodynamik (Leipzig: Veit & Co.), *Weber-Gans*: Repertorium der Physik, Bd. 1, 2. Hälfte (Leipzig: B. G. Teubner).

Anhang.

Quantentheorie.

Die Quantentheorie stellt eine Modifikation sowohl der Mechanik wie der Elektrodynamik dar. Ihre heutige Formulierung muß als noch provisorisch bezeichnet werden, da sie, trotz großer Erfolge in speziellen Fällen, noch nicht für alle Fälle hingeschrieben werden kann und da sie in einem gewissen Widerspruch zur klassischen Physik steht, ohne für diese eine Verbesserung angeben zu können.

Quantenmechanik.

Die Grundgesetze der Mechanik bleiben unverändert. Es sollen aber unter allen von der Mechanik als möglich betrachteten Bewegungen eines Systems nur eine beschränkte Anzahl tatsächlich vorkommen („*Quantenzustände*"). Außerdem sollen teils unter der Wirkung äußerer Impulse, teils auch spontan, nicht durch die Mechanik beherrschte „unmechanische" Vorgänge stattfinden, die das System von einem Quantenzustand in einen anderen überführen. Die Übergangszeit muß als verschwindend klein angenommen werden. Die Art des Überganges entzieht sich aller Beurteilung.

Steht das betrachtete System unter der Wirkung von konservativen äußeren Kräften und werden diese langsam geändert, so ändert sich die Bewegungsform gleichfalls langsam. Die *Adiabatenhypothese* (*Ehrenfest*) behauptet, daß hierbei Quantenzustände als solche erhalten bleiben. (*Bohrs Prinzip der mechanischen Transformierbarkeit.*) „Langsam" heißt dabei eine Änderung, falls sie in einer Zeit erfolgt, die so groß ist, daß das System während derselben alle möglichen Phasen seiner Bewegung durchlaufen hat, oder ihnen wenigstens sehr nahe gekommen ist.

Das ist einfach angebbar bei einer rein periodischen Bewegung. Hier heißt es, die Änderung der äußeren Kräfte erfolge in einer Zeit, die groß ist gegen die Bewegungsperiode. Ist die Bewegung aber nicht periodisch, so durchläuft der Phasenpunkt des Systems ein gewisses Gebiet des Phasenraumes, und kommt jedem Punkt dieses Gebietes im Lauf der Zeit beliebig nahe. Hier ist also an Stelle der Periode die Zeit zu nehmen, in der der Phasenpunkt das ganze Gebiet überstrichen hat, d. h. jedem Punkt derselben nahegekommen ist.

Das Prinzip gestattet aus einer ganz im Endlichen liegenden, als Quantenbahn bekannten Bahn eine neue durch Variation (oder Einführung) äußerer Kräfte zu berechnen. Das Prinzip ist jedoch nicht mehr anwendbar, wenn während der Änderung der äußeren Kräfte das vom Phasenraum bestrichene Gebiet zu einem solchen von weniger Dimensionen degeneriert. (*Entartete Bahnen.*)

Eine Form der mathematischen Formulierung der Quantenmechanik ist folgende:

Man geht aus von der *Hamiltonschen* Funktion $H(p, q)$ (S. 192) und suche eine kanonische Transformation P_k, Q_k (S. 92ff.) zu erreichen, daß H Funktion der neuen P_k allein wird. Dann werden wegen der *Hamiltonschen* Gleichung alle $\dot{P}_k = 0$, d. h. alle $P_k = \text{const}$. Infolgedessen werden die

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial H}{\partial P_k} = \omega_k = \text{const},$$

also:

$$Q_k = \omega_k t + \delta_k.$$

Da die Q_k (falls nicht ω_k verschwindet) unbeschränkt wachsen, andererseits nur Bewegungen im Endlichen betrachtet werden sollen, muß Q_k eine Koordinate vom Charakter einer Winkelkoordinate sein, d. h. das System ändert seine Lage nicht, wenn wir Q_k um ein Vielfaches einer Größe ε_k vermehren. Durch eine geeignete Transformation (Normierung) können wir immer $\varepsilon_k = 2\pi$ machen. Dann heißt Q_k *Winkelvariable*; ω_k ist eine Frequenz, δ_k eine Phasenkonstante. Üblich sind dann statt P_k und Q_k für die normierten neuen Impuls- und Lagekoordinaten die Bezeichnungen J_k und w_k.

Die Quantentheorie fordert jetzt:

$$J_k = \frac{n_k h}{2\pi},$$

wo n_k eine ganze Zahl („Quantenzahlen") und

$$h = 6{,}54 \cdot 10^{-27}$$

sein soll. Während also die klassische Mechanik nur fordert, daß die J_k konstant sind, legt die Quantentheorie diese Konstanten auf diskrete Werte fest.

Eine andere Formulierung ist folgende:

Man geht aus von der *Hamilton-Jacobischen* Differentialgleichung und suche durch eine beliebige Transformation solche Variable, daß die Gleichung durch „Separation der Variablen" gelöst werden kann, d. h. in einer Form:

$$S = \sum S_k(q_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_s),$$

wo die α_i zunächst willkürliche Integrationskonstanten sind und

$$S_k = \int p_k(q_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_s)\, dq_k.$$

Führt man diese Integration über den ganzen Variabilitätsbereich von q_k aus, so ist:

$$J_k = \frac{1}{2\pi}\oint p_k\, d\, q_k = \frac{n_k h}{2\pi}.$$

Hierdurch sind dann auch die α_i festgelegt.

Entartung tritt ein, sobald die ω_k kommensurable Größen sind, bzw. teilweise $= 0$ werden. Dann sind nämlich die J_k und w_k nicht mehr *eindeutig* zu bestimmen. Es werden also auch die Quantenbahnen nicht mehr eindeutig festgelegt. Die Energien bleiben aber trotzdem bestimmt. Z. B. ist die auf S. 97 behandelte Planetenbewegung ein entarteter Fall, weil zwei von den ω gleich Null werden. Nur P_1 ist festgelegt (große Achse). Besteht aber eine wenn auch kleine Abweichung vom *Coulombschen* Gesetz (Bewegung eines Elektrons um einen Atomrumpf), oder beachten wir die relativistische Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit, so ist auch P_2, also die Exzentrizität, nicht mehr frei wählbar. Besteht schließlich noch ein gerichtetes äußeres elektrisches oder magnetisches Feld, so ist auch P_3, die Neigung der Bahn, auf bestimmte Winkel beschränkt (*Richtungsquantelung*).

Quantenelektrodynamik.

Während die klassische Elektrodynamik eine kontinuierliche Ausstrahlung einer periodisch bewegten Ladung ergibt, gilt nach *Bohr*:

1. Elektronen in Quantenbahnen strahlen nicht.

2. Bei Übergang aus einer Quantenbahn in eine andere geringerer Energie tritt Emission einer monochromatischen Strahlung von der Schwingungszahl:

$$\nu = \frac{\Delta E}{h}$$

auf, wo ΔE die Energiedifferenz der beiden Quantenzustände bedeutet. Dieser Vorgang ist umkehrbar (Quantenabsorption).

Da die Quantenmechanik die Quantenbahnen und deren Energie liefert, so werden hiermit auch die möglichen Schwingungszahlen der Emission und Absorption festgelegt als Differenzen der möglichen $\frac{E}{h}$ (Kombinationsprinzip der Spektroskopie). Die Größen $\frac{E}{h}$ heißen „*Spektralterme*".

Für große Quantenzahlen geht die *Bohrsche* Theorie in die klassische Theorie über, wenn man durch ein *Auswahlprinzip* gewisse Forderungen über die *Übergangswahrscheinlichkeiten* aufstellt. Diese werden durch die *Korrespondenzhypothese* auch auf kleine Quantenzahlen verallgemeinert.

Beschreibt man die Bewegung eines Elektrons durch eine *Fourier*darstellung von der Form:

$$x = \sum_{\varkappa} A_{\varkappa} e^{i\varkappa\omega t}$$
$$y = \sum_{\varkappa} B_{\varkappa} e^{i\varkappa\omega t}$$
$$z = \sum_{\varkappa} C_{\varkappa} e^{i\varkappa\omega t}$$

so setzt man in Korrespondenz:

die $\varkappa$ zu der Differenz Δn der Quantenzahlen
die ω zu der Frequenz $2\pi\nu$.

Die Grundperiode ($\varkappa = 1$) entspricht einem Übergang mit $\Delta n = 1$; die nächste Oberschwingung ($\varkappa = 2$) entspricht einem Übergang mit $\Delta n = 2$, usw.

Die Größen $A_{\varkappa}$, $B_{\varkappa}$, $C_{\varkappa}$ der *Fourier*reihe sollen dann die Komponenten des elektrischen Vektors der ausgesandten Welle liefern, gerade so, wie sie es für die klassische Strahlung tun würden.

Durch diese Forderung ist sowohl die Polarisation der Welle festgelegt, wie auch die Intensität der zu verschiedenen Δn gehörenden Strahlungen, d. h. auch die Übergangswahrscheinlichkeiten für die Δn.

Literatur.

Born: Vorlesungen über Atommechanik (Berlin: Julius Springer). — *Sommerfeld*: Atombau und Spektrallinien (Braunschweig: Vieweg) u. a.

Einige physikalische Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1. Verteilungswahrscheinlichkeit.

Teilt man das Gesamtvolumen V einer aus N gleichen Molekülen bestehenden Menge eines idealen Gases in eine große Zahl von *Zellen* vom Volumen v_i, so ist bei Abwesenheit von Fernkräften kein Grund anzugeben, warum irgend eines der Moleküle leichter in der einen als in der anderen Zelle liegen sollte. Man kann somit von der *Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Verteilung* reden. Es ist die Wahrscheinlichkeit für eine solche Verteilung der Moleküle auf jene Zellen, daß in der i-ten Zelle n_i Moleküle sind:

$$W(n_1, n_2, \ldots) = N! \prod_i \left(\frac{v_i}{V}\right)^{n_i} \frac{1}{n_i!}, \tag{1}$$

wo
$$\sum_i n_i = N,$$

denn die Wahrscheinlichkeit, daß irgendein bestimmtes Molekül gerade in der i-ten Zelle liegt, ist $\frac{v_i}{V}$, und der Faktor $\prod_i \frac{N!}{(n_i!)}$ rührt her von

der Identität sämtlicher Moleküle, die zur Folge hat, daß der Zustand des Gases als unverändert und die Verteilung als dieselbe gilt, wenn man irgendein Molekül einer Zelle mit irgendeinem Molekül einer anderen Zelle vertauscht.

Wählt man die Zellen so groß, daß in ihnen immer noch sehr viele Moleküle liegen, $n_i \gg 1$, so liefert die Anwendung der *Stirling*schen Formel (vgl. S. 12) als wahrscheinlichste Verteilung die Gleichverteilung $\bar{n}_i = \frac{v_i}{V} N$ und für die Abweichungen $s_i = n_i - \bar{n}_i$ von dieser Verteilung das Gesetz:

$$W(s_1, s_2, \ldots) = W_0 \cdot e^{-\sum \frac{s_i^2}{2\bar{n}_i}} ds_1 \, ds_2 \ldots \tag{2}$$

Die Konstante W_0 folgt aus

$$\int\limits_{-\bar{n}_i < s_i < N - \bar{n}_i} W(s_1, s_2, \ldots) \, ds_1 \, ds_2 \ldots = 1. \tag{3}$$

Die mittlere Schwankung in einer Zelle wird bestimmt durch:

$$\sqrt{\overline{s_i^2}} = \sqrt{\bar{n}_i (1 - p_i)} \tag{4}$$

und für den Fall

$$\frac{v_i}{V} \ll 1; \qquad \sqrt{\overline{s_i^2}} = \sqrt{\bar{n}_i} = \sqrt{\frac{v_i N}{V}}. \tag{4'}$$

Die absoluten Dichteschwankungen sind also proportional der Wurzel aus der Dichte, die relativen Schwankungen $\frac{s_i}{\bar{n}_i}$ umgekehrt proportional der Wurzel aus der Dichte.

2. Brownsche Bewegung.

Teilchen, die in einem Gase oder einer Flüssigkeit suspendiert sind, führen infolge der Zusammenstöße mit den Molekülen Zickzackbewegungen aus, die um so größer sind, je kleiner die Teilchen sind. Diese unregelmäßigen Bewegungen folgen den Wahrscheinlichkeitsgesetzen. Beobachten wir die Zahl n der Teilchen, die in einem Bereiche v des Gesichtsfeldes eines Mikroskopes sichtbar sind in Zeitabständen τ, so müssen die Gesetze gelten, die für die unter A. 5. und D. (vgl. 147 ff.) gemachten Voraussetzungen zutreffen. Für die Wahrscheinlichkeit einer Beobachtung von n Partikeln gilt die *Poisson*sche Formel

$$W(n) = \frac{e^{-\bar{n}} \cdot \bar{n}^n}{n!}, \quad \bar{n} = \frac{v}{V} N. \tag{1}$$

Die mittlere Schwankung ist $\sqrt{\bar{n}}$.

Zwei Beobachtungen, die einander folgen, sind durch Nachwirkung voneinander abhängig.

Die durchschnittliche Abweichung zweier aufeinanderfolgender Beobachtungen wird

(2) $$\overline{(n_i - n_{i+1})} = P \cdot (n - \bar{n})$$

und die mittlere Abweichung

(2a) $$\sqrt{\overline{(n_i - n_{i+1})^2}} = \sqrt{2 P \cdot \bar{n}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Teilchen innerhalb der Zeit t in einer gegebenen Richtung einen Weg zurücklegt, dessen Ende zwischen ξ und $\xi + d\xi$ liegt, ergibt sich aus kinetischen Überlegungen zu

(3) $$W(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4 D t}}\, d\xi.$$

D ist der „*Diffusionskoeffizient*".

D bzw. $W(\xi)$ und P hängen eng miteinander zusammen, indem P hier die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, daß ein Teilchen bei der folgenden Beobachtung nicht wieder in v angetroffen wird.

Berücksichtigt man, daß im Durchschnitt der Weg, den ein Teilchen in der Zeit t zurücklegt, gleich Null ist, da ja keine Richtung vor ihrer entgegengesetzten ausgezeichnet ist, daß also die ξ auch als die Abweichungen vom Mittel angesehen werden können, so erkennt man sofort die Übereinstimmung mit dem *Gaußschen Fehlergesetz*. Es ist somit der mittlere Weg in der Zeit t

(4) $$\sqrt{\overline{\xi^2}} = \sqrt{2 D t},$$

woraus wiederum die Bedeutung des Diffusionskoeffizienten D ersichtlich wird.

3. Geschwindigkeitsverteilung eines idealen Gases.

Der Zustand eines Gases ist erst dann vollständig bestimmt, wenn außer der räumlichen Verteilung auch die *Geschwindigkeitsverteilung* der Moleküle gegeben ist.

Das *Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilungsgesetz* für ideale Gase lautet: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Molekül eine Geschwindigkeit hat, deren Komponenten zu 3 aufeinander senkrechter Achsen zwischen ξ und $\xi + d\xi$, η und $\eta + d\eta$, ζ und $\zeta + d\zeta$ liegen:

(1) $$d\, W(\xi, \eta, \zeta) = \left(\frac{3}{2\pi \overline{c^2}}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{2\overline{c^2}}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

darin ist

$$\overline{c^2} \equiv \overline{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = 3\overline{\xi^2} = 3\overline{\eta^2} = 3\overline{\zeta^2}.$$

Ein Vergleich mit dem Fehlergesetz zeigt die vollkommene Übereinstimmung für jede Komponente. Die Voraussetzung, daß die Ge-

schwindigkeiten der Moleküle in den verschiedenen Richtungen unabhängig voneinander sind, begründet die Produktbildung.

Verallgemeinerung des Maxwellschen Verteilungsgesetzes durch Boltzmann.

Hat man N Moleküle, deren Zustand durch je r Koordinaten $q_1^{(k)} \dots q_r^{(k)}$ und zugeordnete Impulse $p_1^{(k)} \dots p_r^{(k)}$ beschrieben ist ($k = 1, 2 \dots N$) und ist $E(q_1 \dots p_r)$ die totale Energie eines Moleküls, so herrschte mit überwiegender Wahrscheinlichkeit die Verteilung

$$(2) \qquad f(q_1 \dots p_r) = A\, e^{-\frac{1}{kT} E(q_1 \dots p_r)}\, dq_1 \dots dp_r.$$

T = absolute Temperatur,
k = *Boltzmann*sche Konstante $= 1{,}37 \cdot 10^{-16}$.

Im Fall punktförmiger Molekülmassen m im Schwerfeld ist danach speziell

$$(3) \qquad f = A\, e^{-\frac{1}{kT}\left(\frac{m}{2} v^2 + mgz\right)}\, dx \dots d(m\,\dot{})$$

Wird die kinetische Energie dargestellt durch

$$(4) \qquad K = \tfrac{1}{2} \sum \left[(u_1^1)^2 + \dots + (u_r^N)^2 \right]$$

(also $u_1^{(k)} = \sqrt{m}\,\dot{x}$ bei Punktmassen), so wird der Mittelwert

$$(5) \qquad \overline{\tfrac{1}{2}(u_1^1)^2} = \dots \overline{\tfrac{1}{2}(u_s^k)^2} = \dots \overline{\tfrac{1}{2}(u_r^N)^2} = \tfrac{1}{2} kT.$$

Die Zahl der Moleküle, deren Energiewurzel $\sqrt{E}$ zwischen den Grenzen $\sqrt{E}$ und $\sqrt{E} + d\sqrt{E}$ liegt, ist

$$(6) \qquad A\, e^{-\frac{E}{kT}} (\sqrt{E})^{6N-1}\, d(\sqrt{E}).$$

Im Mittel wird

$$(7) \qquad \bar{E} = 3N \tfrac{1}{2} kT, \quad \overline{(E - \bar{E})^2} = \tfrac{3}{2} N (kT)^2$$

$$\overline{(E - \bar{E})^2} : (\bar{E})^2 = \frac{2}{3N}.$$

Schwankungen makroskopischer Größen.

Ist ω irgendeine (makroskopische) physikalische Größe, welche vom Volumen V und der Temperatur T abhängt, so sind die Schwankungen $\Delta\omega = \omega - \bar{\omega}$ in einem Teilvolumen v des Gesamtvolumens V beherrscht durch das Gesetz (*H. A. Lorentz*)

$$(8) \qquad \overline{(\Delta\omega)^2} = k \frac{v}{v} \left[-T \frac{(\partial\omega/\partial v)^2}{(\partial p/\partial v)}\bigg|_T + T^2 \cdot \frac{(\partial\omega/\partial T)^2}{\partial E/\partial T}\bigg|_v \right].$$

$$\left[\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_v = c_v = \text{spezif. Wärme} \right].$$

1. *Beispiel.* $\omega = \varrho =$ Dichte $=$ Masse pro Volumeinheit

$$(\varDelta\varrho)^2 = \frac{k}{v}\cdot\frac{T\varrho}{\partial p/\partial\varrho}.$$

Bei einem idealen Gase, mit N Molekülen pro Volumeinheit, $\bar{n} = Nv$ Molekülen in v, wo $p = kNT = \frac{k\varrho}{m}T$, wird

(8a) $$\overline{(\varDelta N)^2} = \frac{N}{v}, \quad \overline{(\varDelta n)^2} = \bar{n}.$$

2. *Beispiel.* $\omega = E =$ Energie pro Volumeinheit. In einer inkompressiblen Substanz $(\partial p/\partial\varrho = \infty)$ wird

(8b) $$\overline{(\varDelta E)^2} = \frac{kT^2}{\varrho v}\cdot\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_v$$

4. Zeitliche und räumliche Gesamtheiten.

Faßt man ein bestimmtes Volumelement, die i-te Zelle, des Gases ins Auge, und betrachtet man in gewissen Zeitabständen die Zahl n der in jener Zelle befindlichen Moleküle, so gelten für sie die bei B. 9 gemachten Voraussetzungen. Es gilt somit für die Dichteschwankung des Gases in dieser Zelle das Gesetz:

(1) $$W(s)\,ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}}\,e^{-\frac{1}{2\bar{n}}s^2}\,ds.$$

Die mittlere Schwankung ist $\sqrt{\bar{n}}$ und die mittlere relative Schwankung $\frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}$.

Ein gleiches Resultat für die Dichteschwankungen eines Gases bekommt man, wenn man statt *eine* Zelle *zu verschiedenen Zeiten* zu beobachten, *viele* gleiche, räumlich getrennte Zellen zur *selben* Zeit beobachtet. Zeitmittel und Raummittel stimmen ebenso wie die zeitlichen und räumlichen Schwankungen um diese Mittelwerte überein.

5. Statistische Wahrscheinlichkeit.

Als *statistische Wahrscheinlichkeit* (im Gegensatz zu der bisher behandelten mathematischen) für den „*Zustand*" eines Systems bezeichnet man die ganze (meist große) Zahl von *Komplexionen,* die bei verschiedener Gruppierung der Elemente des Systems zu demselben Zustand führen.

Es gilt dann die Formel:

(1) $$S = k\cdot\ln W + \text{const.}, \quad (\textit{Boltzmann})$$

wo S die *Entropie* des Systems und k die *Boltzmann*sche Konstante bedeutet.

Folgende Beispiele sollen diese Methode, die Entropie zu berechnen, erläutern:

1. Ein ideales Gas, bestehend aus N gleichartigen Atomen der Masse m, erfülle ein Volumen V und besitze die Energie U. Sein Zustand sei gegeben durch die Funktion f, die die Verteilung der Atome auf den 6 dimensionalen Phasenraum (x, y, z, v_x, v_y, v_z) darstellt, so daß im Volumenteil $d\sigma = dx\,dy\,dz \cdot dv_x\,dv_y\,dv_z$ dieses Raumes die Zahl $f\,d\sigma$ Atome liegen.

Die Zahl der Komplexionen ist dann

$$W = \frac{N!}{\Pi(f\,d\sigma)!} \tag{2}$$

$$\text{also } S = k(\ln N! - \sum \ln (f\,d\sigma)! + \text{const.}, \tag{1'}$$

wo die Summe über alle Volumenelemente des Phasenraumes zu erstrecken ist. Die Anwendung der *Stirling*schen Formel liefert, falls N und alle $f\,d\sigma$ große Zahlen sind

$$S = \text{const.} - k\int f \ln f\,d\sigma. \tag{1''}$$

Die Funktion f ist natürlich von V und U nicht unabhängig, denn es muß gelten:

$$U = \frac{m}{2}\int v^2 f\,d\sigma \tag{3}$$

und f muß verschwinden für diejenigen Werte von x, y, z, die außerhalb von V liegen.

Soll der Zustand ein Gleichgewichtszustand sein, so muß S ein Maximum sein, also $\delta S = 0$ mit den Nebenbedingungen $\delta U = 0$ und $\delta N = \int \delta f\,d\sigma = 0$. Dadurch wird f bestimmt zu:

$$f = \alpha e^{-\beta v^2} \text{ mit } \alpha = \frac{N}{V} \cdot \left(\frac{3m}{4\pi}\frac{N}{U}\right)^{\frac{3}{2}} \text{ und } \beta = \frac{3mN}{4U}.$$

Das ergibt für S:

$$S = \text{const.} + kN \ln (U^{\frac{3}{2}} V). \tag{4}$$

2. Dasselbe Resultat folgt auch durch Betrachtungen im $6N$ dimensionalen Phasenraum $(x_1, y_1, z, x_2, \ldots z_N, v_{1x} \ldots v_{Nz})$, in dem die Lagen und Geschwindigkeiten aller N Atome durch einen Punkt bestimmt sind.

Wir teilen den Raum ein in gleichgroße Volumenelemente $d\omega$, indem wir zunächst Flächen $U = \text{const.}$ legen, und die gebildeten Schalen weiter beliebig unterteilen. Da U gegeben ist, muß sich unser Phasenpunkt in der Schale zwischen U und $U + dU$ befinden, wo dU beliebig klein sein mag. Die Zahl der Komplexionen wird dann proportional zu dem Volumen dieser Schale, so weit sie innerhalb V liegt. Eine einfache Abschätzung liefert dies Volumen zu $\alpha \cdot V^N \cdot U^{\frac{3}{2}N-1}\,dU$, wo α ein Zahlenfaktor ist.

Also wird auch hier wieder $S = kN \ln(U^{\frac{3}{2}} V) + \text{const.}$ (wegen $N \gg 1$).

3. Eine Anzahl von N gleichartigen Resonatoren enthalte die Energie U. Die Verteilung dieser Energie soll irgendwie sein. Wir teilen zunächst U in P Beträge der Größe ε $(U = P\varepsilon)$. Dann ist die Zahl der möglichen Verteilungen $= \frac{(N+P-1)!}{(N-1)!\,P!}$ also falls P und $N \gg 1$ ist

$$S = k\,((N+P)\ln(N+P) - N\ln N - P\ln P) + \text{const.} \tag{5}$$

Setzen wir $\bar{u} = \frac{U}{N}$, d. h. $\bar{u}$ gleich der mittleren Energie eines Resonators, so wird

$$S = k\left\{\left(1 + \frac{\bar{u}}{\varepsilon}\right)\ln\left(1 + \frac{\bar{u}}{\varepsilon}\right) - \frac{\bar{u}}{\varepsilon}\ln\frac{\bar{u}}{\varepsilon}\right\} + \text{const.} \tag{5'}$$

oder mit Benutzung der Formel $\frac{\partial S}{\partial U}\Big/_v = \frac{1}{T}$

$$\bar{u} = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1} \tag{6}$$

so daß für verschwindendes ε $\bar{u} = kT$ wird.
Die Quantentheorie (Planck) setzt $\varepsilon = h\nu$, wo $h = 6{,}54 \cdot 10^{-27}$ eine Konstante, das *Wirkungsquantum*, und ν die Frequenz (Schwingungszahl) der Resonatoren bedeutet. Dies führt in Übereinstimmung mit der Erfahrung (spezif. Wärme fester Körper) zu:

$$\bar{u} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{6'}$$

Literatur.

Fürth: s. S. 151, *H. A. Lorentz:* s. S. 151, u. a.

Tabellen.

Die folgenden Tabellen für r^n, $\cos n\varphi$ und $\sin n\varphi$ sind u. a. nützlich zur Berechnung von $z^n = (x + iy)^n = \varrho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$.

r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	r^{10}
0,1	0,01	0,0010	0,0001	—	—	—	—	—	—
0,2	0,04	0,008	0,0016	0,0003	0,0001	—	—	—	—
0,3	0,09	0,027	0,0081	0,0024	0,0007	0,0002	0,0001	—	—
0,4	0,16	0,064	0,0256	0,0102	0,0041	0,0016	0,0007	0,0003	0,0001
0,5	0,25	0,125	0,0625	0,0312	0,0156	0,0078	0,0039	0,0020	0.0010
0,6	0,36	0,216	0,1296	0,0778	0,0467	0,0280	0,0168	0,0101	0,0060
0,7	0,49	0,343	0,2401	0,1681	0,1176	0,0824	0,0576	0,0404	0,0282
0,8	0,64	0,512	0,4096	0,3277	0,2621	0,2097	0,1678	0,1342	0,1074
0,9	0,81	0,729	0,6561	0,5905	0,5314	0,4783	0,4305	0,3874	0,3487
1,—	1,—	1,—	1,—	1,—	1,—	1,—	1,—	1,—	1,—
1,1	1,21	1,331	1,4641	1,6105	1,7716	1,9487	2,1436	2,3579	2,5937
1,2	1,44	1,728	2,0736	2,4883	2,9860	3,5831	4,2998	5,1598	6,1917
1,3	1,69	2,197	2,8561	3,7129	4,8268	6,2749	8,1573	10,6545	13,7858
1,4	1,96	2,744	3,8416	5,3782	7,5295	10,5414	14,7579	20,6610	28,9255
1,5	2,25	3,375	5,0625	7,5937	11,3906	17,0859	25,6289	38,4434	57,6650
1,6	2,56	4,096	6,5536	10,4858	16,7772	26,8435	42,9497	68,7195	109,9512
1,7	2,89	4,913	8,3521	14,1986	24,1376	41,0339	69,7576	118,5879	201,5994
1,8	3,24	5,832	10,4976	18,8957	34,0122	61,2220	110,1996	198,3593	357,0467
1,9	3,61	6,859	13,0321	24,7610	47,0459	89,3872	169,8356	322,6877	613,1066
2,—	4,—	8,—	16,—	32,—	64,—	128,—	256,—	512,—	1024,—

φ	$\cos \varphi$	$\cos 2\varphi$	$\cos 3\varphi$	$\cos 4\varphi$	$\cos 5\varphi$	$\cos 6\varphi$	$\cos 7\varphi$	$\cos 8\varphi$	$\cos 9\varphi$
10°	0,9848	9397	8660	7660	6428	5000	3420	1736	0
20°	0,9397	7660	5000	1736	−1736	−5000	−7660	−9397	−1
30°	0,8660	5000	0,—	−5000	−8660	−1,—	−6860	−5000	0
40°	0,7660	1736	−5000	−9397	−9397	−5000	1736	7660	+1
50°	0,6428	−1736	−8660	−9397	−3420	5000	9848	7660	0
60°	0,5000	−5000	−1,—	−5000	5000	+1,—	5000	−5000	−1
70°	0,3420	−7660	−8660	1736	9848	5000	−6428	−9397	0
80°	0,1736	−9397	−5000	7660	7660	−5000	−9397	1736	+1
90°	0,—	−1,—	0,—	+1,—	0,—	−1,—	0,—	+1,—	0
100°	−1736	−9397	5000	7660	−7660	−5000	9397	1736	−1
110°	−3420	−7660	8660	1736	−9848	5000	6428	−9397	0
120°	−5000	−5000	+1,—	−5000	−5000	1,—	−5000	−5000	+1
130°	−6428	−1736	8660	−9397	+3420	5000	−9848	7660	0
140°	−7660	1736	5000	−9397	+9397	−5000	−1736	7660	−1
150°	−8660	5000	0,—	−5000	+8660	−1,—	8660	−5000	0
160°	−9397	7660	−5000	1736	+1736	−5000	7660	−9397	+1
170°	−9848	9397	−8660	7660	−6428	5000	−3420	1736	0
180°	−1,—	+1,—	−1,—	+1,—	−1,—	+1,—	−1,—	+1,—	−1

φ	sin φ	sin 2 φ	sin 3 φ	sin 4 φ	sin 5 φ	sin 6 φ	sin 7 φ	sin 8 φ	sin 9 φ
10°	0,1736	3420	5000	6428	7660	8660	9397	9848	+1,—
20°	0,3420	6428	8660	9848	9848	8660	6428	3420	0,—
30°	0,5000	8660	1,—	8660	5000	0,—	—5000	—8660	—1
40°	0,6428	9848	8660	3420	—3420	—8660	—9848	—6428	0
50°	0,7660	9848	5000	—3420	—9397	—8660	—1736	6428	+1
60°	0,8660	8660	0,—	—8660	—8660	0,—	8660	8660	0
70°	0,9397	6428	—5000	—9848	—1736	8660	7660	—3420	—1
80°	0,9848	3420	—8660	—6428	+6428	8660	—3420	—9848	0
90°	+1,—	0,—	—1,—	0,—	+1,—	0,—	—1,—	0,—	+1
100°	9848	—3420	—8660	6428	6428	—8660	—3420	9848	0
110°	9397	—6428	—5000	9848	—1736	—8660	7660	3420	—1
120°	8660	—8660	0,—	8660	—8660	0,—	8660	—8660	0
130°	7660	—9848	5000	3420	—9397	8660	—1736	—6428	+1
140°	6428	—9848	8660	—3420	—3420	8660	—9848	6428	0
150°	5000	—8660	1,—	—8660	5000	0,—	—5000	8660	—1
160°	3420	—6428	8660	—9848	9848	—8660	+6428	—3420	0
170°	1736	—3420	5000	—6428	7660	—8660	9397	—9848	+1
180°	0,—	0,—	0,—	0,—	0,—	0,—	0,—	0,—	0

Binomial-Koeffizienten: $\binom{m}{n}$

n ist hier immer eine ganze positive Zahl.

m kann beliebige positive oder negative Werte haben.

n =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m = 1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

n =	0	1	2	3	4	5	6
m = —1	1	—1	+1	— 1	+ 1	— 1	+ 1
—2	1	—2	3	— 4	+ 5	— 6	+ 7
—3	1	—3	6	—10	+15	— 21	+ 28
—4	1	—4	10	—20	35	— 56	+ 84
—5	1	—5	15	—35	70	—126	+210

$n=$	0	1	2	3	4	5
$m=-\frac{7}{2}$	1	$-\frac{7}{2}$	$\frac{63}{8}$	$-\frac{231}{16}$	$\frac{3003}{128}$	$\frac{9009}{256}$
$-\frac{5}{2}$	1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{35}{8}$	$-\frac{105}{16}$	$\frac{1155}{128}$	$\frac{3003}{256}$
$-\frac{3}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{15}{8}$	$-\frac{35}{16}$	$\frac{315}{128}$	$-\frac{693}{256}$
$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{16}$	$+\frac{35}{128}$	$-\frac{63}{256}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{5}{128}$	$\frac{7}{256}$
$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$+\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{16}$	$+\frac{3}{128}$	$-\frac{3}{256}$
$\frac{5}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{5}{16}$	$-\frac{5}{128}$	$-\frac{3}{256}$
$\frac{7}{2}$	1	$\frac{7}{2}$	$\frac{35}{8}$	$\frac{35}{16}$	$\frac{35}{128}$	$-\frac{7}{256}$

$n=$	0	1	2	3	4	5
$m=-\frac{4}{3}$	1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{14}{9}$	$-\frac{140}{81}$	$\frac{455}{243}$	$-\frac{1456}{729}$
$-\frac{2}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$	$-\frac{40}{81}$	$\frac{110}{243}$	$-\frac{308}{729}$
$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{14}{81}$	$\frac{35}{243}$	$-\frac{91}{729}$
$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{5}{81}$	$-\frac{10}{243}$	$\frac{22}{729}$
$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{4}{81}$	$-\frac{7}{243}$	$\frac{14}{729}$
$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{4}{81}$	$\frac{5}{243}$	$-\frac{8}{729}$

$n=$	0	1	2	3	4	5
$m=-\frac{5}{4}$	1	$-\frac{5}{4}$	$\frac{45}{32}$	$-\frac{195}{128}$	$\frac{3315}{2048}$	$-\frac{13923}{8192}$
$-\frac{3}{4}$	1	$-\frac{3}{4}$	$\frac{21}{32}$	$-\frac{77}{128}$	$\frac{1155}{2048}$	$-\frac{4389}{8192}$
$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{32}$	$-\frac{15}{128}$	$\frac{195}{2048}$	$-\frac{663}{8192}$
$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{32}$	$\frac{7}{128}$	$-\frac{77}{2048}$	$\frac{231}{8192}$
$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{32}$	$\frac{5}{128}$	$-\frac{45}{2048}$	$\frac{117}{8192}$
$\frac{5}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{32}$	$-\frac{5}{128}$	$\frac{35}{2048}$	$-\frac{77}{8192}$

Dieselben in Dezimalbrüchen geschrieben:

$n =$	0	1	2	3	4	5
$m = -\frac{7}{2}$	1	−3,5	7,875	−14,437	23,461	35,191
$-\frac{5}{2}$	1	−2,5	4,375	− 6,5625	9,0234	11,7305
$-\frac{3}{2}$	1	−1,5	1,875	− 2,1875	2,4609	2,7070
$-\frac{1}{2}$	1	−0,5	0,375	− 0,3125	0,2734	0,2461
$\frac{1}{2}$	1	0,5	−0,125	0,0625	−0,0391	0,0273
$\frac{3}{2}$	1	1,5	0,375	− 0,0625	0,0234	−0,0117
$\frac{5}{2}$	1	2,5	1,875	0,3125	−0,0391	+0,0117
$\frac{7}{2}$	1	3,5	4,375	2,1875	0,2734	−0,0273

$n =$	0	1	2	3	4	5
$m = -\frac{4}{3}$	1	−1,33	1,556	−1,7284	1,8724	−1,9973
$-\frac{2}{3}$	1	−0,66	0,556	−0,4938	0,4527	−0,4225
$-\frac{1}{3}$	1	−0,33	0,222	−0,1728	0,1440	−0,1248
$\frac{1}{3}$	1	0,33	−0,111	0,0617	−0,0412	0,0302
$\frac{2}{3}$	1	0,667	−0,111	0,0494	−0,0288	0,0192
$\frac{4}{3}$	1	1,33	0,2222	−0,0494	0,0206	−0,0110

$n =$	0	1	2	3	4	5
$m = -\frac{5}{4}$	1	−1,25	1,40625	−1,5234	1,6187	−1,6996
$-\frac{3}{4}$	1	−0,75	0,65625	−0,6016	0,5640	−0,5358
$-\frac{1}{4}$	1	−0,25	0,15625	−0,1172	0,0952	−0,0809
$\frac{1}{4}$	1	0,25	−0,09375	0,0547	−0,0376	0,0282
$\frac{3}{4}$	1	0,75	−0,09375	0,03906	−0,0220	0,0143
$\frac{5}{4}$	1	1,25	0,15625	−0,03906	0,0171	−0,0094

Reihen-Koeffizienten.

n	$\frac{1}{n}$	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\frac{1}{n}$	$n!$	$1\cdot3\cdot5\dots(2n-1)$	$2\cdot4\cdot6\dots2n$
1	1,—	1,—	1	1	2
2	0,5—	1,5—	2	3	8
3	0,33333	1,83333	6	15	48
4	0,25—	2,08333	24	105	384
5	0,2—	2,28333	120	945	3840
6	0,16667	2,45—	720	10395	46080
7	0,14286	2,59286	5040	135135	645120
8	0,125—	2,71786	40320	2·027025	10·321920
9	0,11111	2,82897	362880	34·459425	185·794560
10	0,1—	2,92897	3·628800	654·729075	3715·891200

n	$\frac{n!}{1\cdot3\cdot5\dots(2n-1)}$	$\frac{1\cdot3\cdot5\dots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\dots2n}$
1	1,— $= 1$	0,5— $= \frac{1}{2}$
2	0,66667 $= \frac{2}{3}$	0,375— $= \frac{3}{8}$
3	0,4— $= \frac{2}{5}$	0,3125- $= \frac{5}{16}$
4	0,22857 $= \frac{8}{35}$	0,27344 $= \frac{35}{128}$
5	0,12698 $= \frac{8}{63}$	0,24609 $= \frac{63}{256}$
6	0,06926 $= \frac{16}{231}$	0,22559 $= \frac{231}{1024}$
7	0,03730 $= \frac{16}{429}$	0,20947 $= \frac{429}{2048}$
8	0,01989 $= \frac{128}{6435}$	0,19638 $= \frac{6435}{32768}$
9	0,01053 $= \frac{128}{12155}$	0,18547 $= \frac{12155}{65536}$
10	0,00554 $= \frac{256}{46189}$	0,17620 $= \frac{46189}{262144}$

Energie-

	erg	g-Gew. cm	kg-Gew. m	PS sec	PS st
erg	1	$1{,}02 \cdot 10^{-3}$	$1{,}02 \cdot 10^{-8}$	$1{,}36 \cdot 10^{-10}$	$3{,}77 \cdot 10^{-14}$
g-Gew. cm . .	981	1	10^{-5}	$1{,}33 \cdot 10^{-7}$	$3{,}69 \cdot 10^{-11}$
kg-Gew. m . .	$9{,}81 \cdot 10^{7}$	10^{5}	1	$1{,}33 \cdot 10^{-2}$	$3{,}69 \cdot 10^{-6}$
PS sec	$7{,}36 \cdot 10^{9}$	$7{,}5 \cdot 10^{6}$	75	1	$2{,}78 \cdot 10^{-4}$
PS st	$2{,}65 \cdot 10^{13}$	$2{,}7 \cdot 10^{10}$	$2{,}70 \cdot 10^{5}$	$3{,}6 \cdot 10^{3}$	1
Wattsec. . .	10^{7}	$1{,}02 \cdot 10^{4}$	$1{,}02 \cdot 10^{-1}$	$1{,}36 \cdot 10^{-3}$	$3{,}77 \cdot 10^{-7}$
Kilowattst. .	$3{,}6 \cdot 10^{13}$	$3{,}67 \cdot 10^{10}$	$3{,}67 \cdot 10^{5}$	$4{,}89 \cdot 10^{3}$	1,35
Liter Atm. . .	$1{,}0133 \cdot 10^{9}$	$1{,}03 \cdot 10^{6}$	$1{,}03 \cdot 10^{1}$	$1{,}38 \cdot 10^{-1}$	$3{,}82 \cdot 10^{-5}$
g cal.	$4{,}188 \cdot 10^{7}$	$4{,}271 \cdot 10^{4}$	$4{,}27 \cdot 10^{-1}$	$5{,}69 \cdot 10^{-3}$	$1{,}58 \cdot 10^{-6}$
Volt·Elektron	$1{,}59 \cdot 10^{-12}$	$1{,}62 \cdot 10^{-15}$	$1{,}62 \cdot 10^{-20}$	$2{,}16 \cdot 10^{-22}$	$6{,}00 \cdot 10^{-26}$
hN	$2{,}15 \cdot 10^{-11}$	$2{,}19 \cdot 10^{-14}$	$1{,}19 \cdot 10^{-10}$	$2{,}92 \cdot 10^{-21}$	$8{,}10 \cdot 10^{-25}$
Volt·Elektr.·*Z*	$0{,}964 \cdot 10^{12}$	$0{,}984 \cdot 10^{9}$	$0{,}984 \cdot 10^{4}$	$1{,}31 \cdot 10^{2}$	$3{,}64 \cdot 10^{-2}$

Elektrizitäts-

	CGS stat.	CGS magn.	Amp./sec (= Coulomb)
CGS stat.	1	$0{,}33 \cdot 10^{-10}$	$0{,}33 \cdot 10^{-9}$
CGS magn.	$3 \cdot 10^{10}$	1	10
Amp. sec (= Coulomb)	$3 \cdot 10^{9}$	0,1	1
$Z \cdot e$ = Grammäquiv. .	$2{,}896 \cdot 10^{14}$	$9{,}654 \cdot 10^{3}$	$9{,}654 \cdot 10^{4}$
Elektronen	$4{,}76 \cdot 10^{-10}$	$1{,}56 \cdot 10^{-20}$	$1{,}56 \cdot 10^{-19}$
gr·Ag . . . . . : . .	$2{,}71 \cdot 10^{12}$	$0{,}894 \cdot 10^{2}$	$0{,}894 \cdot 10^{3}$
cm^3 H_2O (Knallgas) .	$1{,}76 \cdot 10^{10}$	0,581	5,81

einheiten.

Wattsec.	Kilowattst.	Liter Atm.	g cal.	Volt·Elektron	hN	Volt·Elektron·Z
10^{-7}	$2{,}78\cdot10^{-14}$	$9{,}86\cdot10^{-10}$	$2{,}39\cdot10^{-8}$	$6{,}29\cdot10^{11}$	$4{,}65\cdot10^{10}$	$1{,}04\cdot10^{-12}$
$9{,}81\cdot10^{-5}$	$2{,}72\cdot10^{-11}$	$9{,}67\cdot10^{-7}$	$2{,}34\cdot10^{-5}$	$6{,}17\cdot10^{14}$	$4{,}56\cdot10^{13}$	$1{,}01\cdot10^{-9}$
9,81	$2{,}72\cdot10^{-6}$	$9{,}67\cdot10^{-2}$	2,34	$6{,}17\cdot10^{19}$	$4{,}56\cdot10^{18}$	$1{,}01\cdot10^{-4}$
736	$2{,}05\cdot10^{-4}$	7,26	$1{,}76\cdot10^{2}$	$4{,}63\cdot10^{21}$	$3{,}42\cdot10^{20}$	$7{,}63\cdot10^{-4}$
$2{,}65\cdot10^{6}$	$7{,}37\cdot10^{-1}$	$2{,}61\cdot10^{4}$	$6{,}33\cdot10^{5}$	$1{,}67\cdot10^{25}$	$1{,}23\cdot10^{24}$	$2{,}75\cdot10^{1}$
1	$2{,}78\cdot10^{-7}$	$9{,}86\cdot10^{-3}$	$2{,}39\cdot10^{-1}$	$6{,}29\cdot10^{18}$	$4{,}65\cdot10^{17}$	$1{,}03\cdot10^{-5}$
$3{,}6\cdot10^{6}$	1	$3{,}55\cdot10^{4}$	$8{,}60\cdot10^{5}$	$2{,}26\cdot10^{25}$	$1{,}67\cdot10^{24}$	$3{,}73\cdot10^{1}$
$1{,}01\cdot10^{2}$	$2{,}81\cdot10^{-5}$	1	$2{,}42\cdot10^{1}$	$6{,}37\cdot10^{20}$	$4{,}72\cdot10^{10}$	$1{,}05\cdot10^{-8}$
4,19	$1{,}16\cdot10^{-6}$	$4{,}13\cdot20^{-2}$	1	$2{,}63\cdot10^{19}$	$1{,}95\cdot10^{18}$	$4{,}33\cdot10^{-5}$
$1{,}59\cdot10^{-19}$	$4{,}42\cdot10^{-26}$	$1{,}57\cdot10^{-21}$	$3{,}80\cdot10^{-20}$	1	$7{,}41\cdot10^{-2}$	$1{,}65\cdot10^{-24}$
$2{,}15\cdot10^{-18}$	$5{,}99\cdot10^{-25}$	$2{,}12\cdot10^{-20}$	$5{,}14\cdot10^{-19}$	13,5	1	$2{,}23\cdot10^{-23}$
$0{,}964\cdot10^{5}$	$2{,}68\cdot10^{-2}$	$0{,}950\cdot10^{3}$	$2{,}31\cdot10^{4}$	$6{,}06\cdot10^{23}$	$4{,}48\cdot10^{22}$	1

N = Rydbergkonstante = $3{,}29\cdot10^{15}\,t^{-1} = 3\cdot10^{10}\cdot109\,737{,}11$,
$h = 6{,}54\cdot10^{-27}$ (Wirkungsquantum).
$Z = 6{,}06\cdot10^{23}$ (Moleküle pro Mol).

mengeneinheiten.

Grammäquiv.	Elektronen	gr·Ag	cm³ H_2O
$3{,}45\cdot10^{-15}$	$2{,}10\cdot10^{9}$	$0{,}369\cdot10^{-12}$	$0{,}057\cdot10^{-9}$
$1{,}037\cdot10^{-4}$	$6{,}41\cdot10^{19}$	$1{,}118\cdot10^{-2}$	1,74
$1{,}037\cdot10^{-5}$	$6{,}41\cdot10^{18}$	$1{,}118\cdot10^{-3}$	0,1740
1	$6{,}19\cdot10^{23}$	$1{,}069\cdot10^{2}$	$0{,}165\cdot10^{5}$
$1{,}62\cdot10^{-24}$	1	$1{,}753\cdot10^{-22}$	$0{,}271\cdot10^{-19}$
$9{,}35\cdot10^{-3}$	$5{,}69\cdot10^{21}$	1	$0{,}154\cdot10^{3}$
$6{,}07\cdot10^{-5}$	$3{,}69\cdot10^{10}$	$0{,}649\cdot10^{-2}$	1

Z = *Avogadro*sche Konstante = $6{,}06\cdot10^{23}$.

Namen- und Sachverzeichnis.

Die Zahlen geben die Seiten an.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.

Siehe auch umstehende Seite.